MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I, syksy 2015
Ratkaisuita harjoituksiin 7
Matti Palomäki

1. *Väite*: Jos A ja B ovat sisäpisteettömiä ja B on suljettu, ei myöskään joukolla $A \cup B$ ole sisäpisteitä.

   Todistus. Oletetaan $A \neq \emptyset \neq B$ (missä tapauksessa väite pätisi triviaalisti).

   Tehdään vastaoletus: $int(A \cup B) \neq \emptyset$. Olkoon $a \in int(A \cup B)$.
   Jos $a \notin B$, niin koska B on suljettu, löytyy pisteen a ympäristö U, jolla $U \cap B = \emptyset$. Tällöin kahden avoimen joukon leikkaus $V = int(A \cup B) \cap U$ on avoin ja $V \subset A$. Lisäksi $a \in V$, joten V on epätyhjä, mikä on vastoin oletusta $int A = \emptyset$.
   Täytyy siis olla $a \in B$, joten $int(A \cup B) \subset B$. Tämä taas on vastoin oletusta $int B = \emptyset$. Ristiriita.
   Näin ollen vastaoletus ei päde ja $int(A \cup B) = \emptyset$. □

2. *Väite*: $[0, \infty[\approx] - \infty, a]$

   Todistus. Tarkastellaan kuvausta

   $$f : [0, \infty[\longrightarrow] - \infty, a], f(x) = -x + a$$

   ja käydään läpi homeomorfismin ehdot.

   (1) Kuvauksen f bijektiivisyys:
   Kun $y \in] - \infty, a]$, niin

   $$-x + a = f(x) = y \leftrightarrow x = a - y \ .$$

   Koska $y \leqslant a$, niin $x = a - y \geqslant a - a = 0$, joten joukosta $[0, \infty[$ löytyy tasan yksi x, jolle $f(x) = y$.
   Kuvaus f on siten bijektio ja sen käänteiskuvaus on
   $f^{-1} :] - \infty, a] \longrightarrow [0, \infty[$, $f^{-1}(y) = -y + a$.

   (2) Kuvauksen f jatkuvuus:
   Polynomina $f = -x + a$ on jatkuva.

   (3) Käänteiskuvauksen jatkuvuus:
   Käänteiskuvaus $f^{-1}(x) = -x + a$ on poynomina jatkuva.

   □

3. *Väite*: $A \approx \mathbb{R}^2$

   Todistus. Tarkastellaan kuvausta f ja käydään läpi homeomorfismin ehdot.

   (1) Kuvauksen f bijektiivisyys:
   Tunnetusti f on bijektio.

   (2) Kuvauksen f jatkuvuus:
   Kuvaus $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x, y)$ on jatkuva, sillä sen komponenttikuvaukset $(x, y, z) \to x$ ja $(x, y, z) \to y$ ovat jatkuvia (Väisälä 5.9). Siten funktion g rajoittumana $f = g|A$ on jatkuva (Väisälä, 7.11).

   (3) Kuvauksen f käänteiskuvauksen jatkuvuus:
   Kuvauksen f käänteiskuvaus on

   $$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to A, f^{-1}(x, y) = (x, y, \sin x + \cos y).$$

   Kuvaus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $h(x, y) = (x, y, \sin x + \cos y)$ on jatkuva, koska sen komponenttikuvaukset $(x, y) \to x$, $(x, y) \to y$ ja $(x, y) \to \sin x + \cos y$ ovat tunnetusti jatkuvia. Jatkuvan kuvauksen h määräämänä kuvauksena $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to A$, $f^{-1}(x) = h(x)$ on jatkuva (Väisälä, 7.17).

   $\square$

4. (a) Olkoot $a, b \in [0, 1]$, $a > b$. Koska f on derivoituva välillä $[0, 1]$, differentiaalilaskennan väliarvolauseen perusteella on sellainen piste $c \in [0, 1]$, että $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

   Koska $c \leqslant 1$ ja f' on kasvava, on $f'(c) = 3c^2 + 1 \leqslant 3 * 1^2 + 1 = 4$. Näin ollen $4(a - b) \geqslant f(a) - f(b)$ ja koska $a > b$ ja $f(a) > f(b)$ (f on kasvava), $4|a - b| \geqslant |f(a) - f(b)|$.

   Kuvaus f on 4-Lipschitz.

   (b) Edellisen kohdan jälkeen täytyy enää näyttää $\frac{e(f(x),f(y))}{M} \leqslant d(x, y)$, kaikilla x, y ja jollain M.

   Olkoon $a, b, c \in [0, 1]$ kuten kohdassa (a). Koska f' on kasvava ja $0 \leqslant c$, on $f'(c) \geqslant 3 * 0^2 + 1 = 1$. Näin ollen $1(a - b) \leqslant f(a) - f(b)$ ja siten $\frac{|a-b|}{4} < |a - b| \leqslant |f(a) - f(b)|$, joten tämän ja (a)-kohdan nojalla f on 4-bilipschitz.

   (c) Kyllä. Bilipschitz-kuvaukset ovat upotuksia (Väisälä 9.19).

5. *Väite*: Kun $f : (X, d) \approx (Y, e)$ ja $d(x, A) > 0$, pätee $e(f(x), f(A)) > 0$.

   Todistus. Olkoon $x \in X$, $d(x, A) > 0$. Lauseen (Väisälä, 6.11) mukaan siis $x \notin \overline{A}$.

Tehdään vastaoletus: $e(f(x), f(A)) = 0$ eli $f(x) \in \overline{f(A)}$.
Kuvaus f on homeomorfismi, joten f^{-1} on jatkuva. Siten lauseen Väisälä, 6.12 nojalla

$$x = f^{-1}(f(x)) \in \overline{f^{-1}(f(A))} = \overline{A},$$

eli $d(x, A) = 0$. Ristiriita.
Siis vastaoletus ei päde ja $f(x) \notin \overline{f(A)}$, eli $e(f(x), f(A)) > 0$. $\square$

6. (a) Näytetään, että $id : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, e)$ on homeomorfismi, jolloin metriikat d, e ovat ekvivalentit.

   (1) Identtinen kuvaus on bijektio.

   (2) Identtisen kuvauksen $id : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, e)$ jatkuvuus:
   Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja sillä ympäristö $U \subset \mathbb{R}$ avaruudessa $(\mathbb{R}, e)$, jolloin löytyy kuula $B_e(x, r) \subset U$. Nyt

$$id(B_d(x, r^2)) = \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) = |x - y| < r^2\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} \mid e(x, y) = \sqrt{|x - y|} < \sqrt{r^2}\} = B_e(x, r) \subset U,$$

   joten $id : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, e)$ on jatkuva.

   (3) Käänteiskuvauksen $id : (\mathbb{R}, e) \to (\mathbb{R}, d)$ jatkuvuus:
   Olkoot $x \in \mathbb{R}$ ja sillä ympäristö $U \subset \mathbb{R}$ avaruudessa $(\mathbb{R}, d)$, jolloin löytyy kuula $B_d(x, r) \subset U$. Nyt

$$id(B_e(x, \sqrt{r})) = \{y \in \mathbb{R} \mid e(x, y) = \sqrt{|x - y|} < \sqrt{r}\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) = |x - y| < r\} = B_d(x, r) \subset U,$$

   joten $id : (\mathbb{R}, e) \to (\mathbb{R}, d)$ on jatkuva.

   $\square$

   (b) Olkoon $M \geqslant 1$. Etäisyys $d(0, 2M^2) = 2M^2$ ja etäisyys $e(0, 2M^2) = \sqrt{2}M$, joten

$$\frac{d(0, 2M^2)}{M} = 2M > \sqrt{2}M = e(0, 2M^2).$$

   Joukosta $\mathbb{R}$ siis löytyy pisteet, joilla M-bilipschitz-ehto ei täyty. Metriikat eivät ole bilipschitz-ekvivalentit.

   Huom. Tämä (b)-kohdan ratkaisu nojaa seuraavanlaiselle päättelylle: Jos bilipschitz-ehto täyttyisi, jollain $M \geqslant 1$ ja kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ pätisi

$$\frac{d(x, y)}{M} \leqslant e(x, y) \leqslant M d(x, y).$$

Kuitenkin $\frac{d(x,y)}{e(x,y)} = \sqrt{|x-y|}$, joten suhdetta voidaan kasvattaa rajatta kasvattamalla pisteiden etäisyyttä. Toisaalta bilipschitzissä suhteen pitäisi olla enimmillään M ja sen käänteisluvun vähintään M. Bilipschitz-ehto ei siis voi pätea. Yllä valittiin sopivan havainnolliset kaksi pistettä, joilla tämä näkyy.