# RATKAISUEHDOTUKSIA, HARJOITUS 2

OSSI NIEMIMÄKI

1. Tarkistetaan normin aksioomat (Väisälä 2012, s.17):

(N1): Olkoot $x, y$ tasossa $\mathbb{R}^2$. Tällöin $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, ja itseisarvon normiominaisuuksista seuraa että

$$\begin{aligned} |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &= (|x_1| + |x_2|) + (|y_1| + |y_2|) \\ &\leq \|x\| + \|y\|, \end{aligned}$$

ja

$$2|x_1 + y_1| \leq 2\left(|x_1| + |y_1|\right) \leq \|x\| + \|y\|.$$

Koska ehto toteutuu maksimin molemmille luvuille, pitää se paikkansa myös itse maksimille.

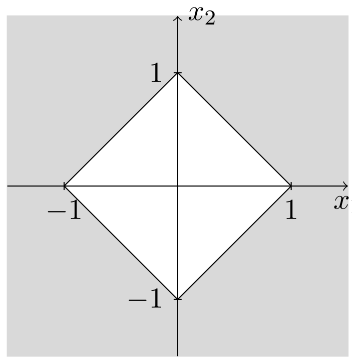
(N2): Selvästi, sillä $ax = (ax_1, ax_2)$.

(N3): Olkoon $\|x\| = 0$. Tällöin joko $|x_1| + |x_2| = 0$ tai $2|x_1| = 0$:

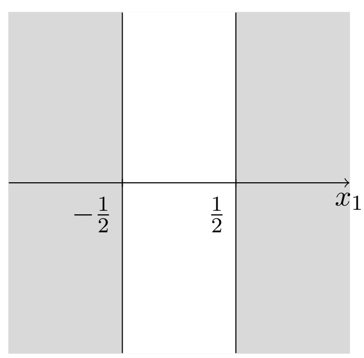
(i) $|x_1|+|x_2| = 0$: selvästi tämä pätee jos ja vain jos $x_1 = x_2 = 0$.

(ii) $2|x_1| = 0$: tällöin $|x_1| + |x_2| \leq 2|x_1| = 0$ maksimiehdon mukaisesti, joten $x_2 = x_1 = 0$.

2. Yksikköympyrät maksimin luvuille:



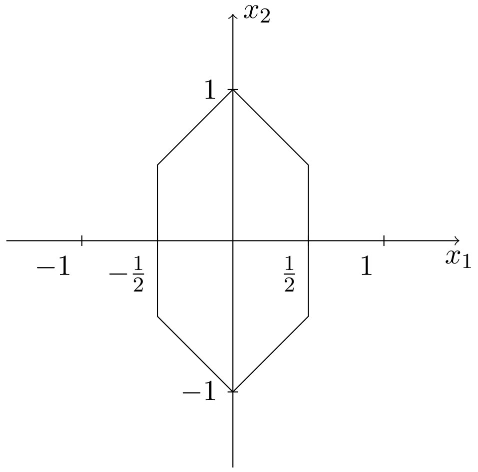

$|x_1| + |x_2| = 1$




$2|x_1| = 1$

Lisäksi huomataan että kumpikin lauseke on suurempi kuin 1 harmaalla alueellaan, ja pienempi kuin 1 valkealla alueellaan. Siispä valkeiden alueiden leikkauksesta saadaan seuraavan sivun yksikköympyrä:

*Date*: 15. syyskuuta 2015.




3. Annettu kuvaus on metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$.

   *Todistus.* Olkoot $x, y, z$ tasossa $\mathbb{R}^2$. Tarkistetaan aksioomat (Väisälä 2012, s.21):

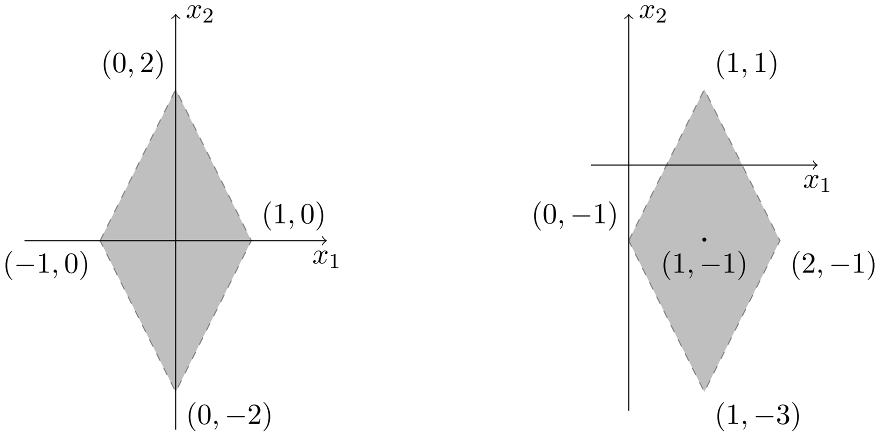
   (M1): Kummallekin summattavalle pätee ($i = 1$ ja $p = 5$, tai $i = 2$ ja $p = 3$)
$$\begin{aligned} |x_i^p - z_i^p| &= |x_i^p - y_i^p + y_i^p - z_i^p| \\ &\leq |x_i^p - y_i^p| + |y_i^p - z_i^p|, \end{aligned}$$
   jolloin väite seuraa laskemalla nämä puolittain yhteen.

   (M2): Selvästi: $|x_i^p - z_i^p| = |(-1)(z_i^p - x_i^p)| = |z_i^p - x_i^p|$.

   (M3): Selvästi jos $x = y$ niin $d(x, y) = 0$. Olkoon $d(x, y) = 0$. Tällöin $x_i^p = y_i^p$, indeksit kuten yllä. Toisaalta kaikille parittomille kokonaisluvuille $p$ ja kaikille reaaliluvuille $x, y$ pätee $x^p = y^p$ jos ja vain jos $x = y$. Siispä jos $d(x, y) = 0$ niin $x = y$.

   □

4. Annettu metriikka on normin $\|x\| = 2|x_1| + |x_2|$ määrittämä. Hahmotellaan ensin origokeskeisen suljetun kuulan $\bar{B}(0, 2)$ reuna, eli ratkaistaan yhtälö
$$2|x_1| + |x_2| = 2.$$
   Nähdään, että reuna on yhdistelmä seuraavien funktioiden graafeista, kukin omalla neljänneksellään:
$$\begin{aligned} x_2 &= 2 - 2x_1 && x \geq 0, y \geq 0 \\ x_2 &= -2 + 2x_1 && x \geq 0, y \leq 0 \\ x_2 &= -2 - 2x_1 && x \leq 0, y \leq 0 \\ x_2 &= 2 + 2x_1 && x \leq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$
   Saatu kuvio voidaan siirtää sellaisenaan pisteeseen $(1, -1)$. Sekä origokeskeinen kuula että tehtävänannossa kysytty kuula $B((1, -1), 2)$ on piirretty seuraavan sivun kuvassa harmaalla:




5. Olkoon $X$ positiivisten reaalilukujen joukko. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) = |x^{-1/2} - y^{-1/2}|, \quad x, y \in X$$

on metriikka joukossa $X$.

*Todistus.* Olkoot $x, y, z$ joukossa $X$.
(M1):

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |x^{-1/2} - z^{-1/2}| = |x^{-1/2} - y^{-1/2} + y^{-1/2} - z^{-1/2}| \\ &\leq |x^{-1/2} - y^{-1/2}| + |y^{-1/2} - z^{-1/2}| \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

(M2): Selvästi.
(M3):

$$\begin{aligned} d(x,y) = 0 &\Leftrightarrow x^{-1/2} = y^{-1/2} \\ &\Leftrightarrow x^{-1} = y^{-1} \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

□

6. Olkoon $E = raj\,([0,1], \mathbb{R})$ varustettu sup-normilla

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Etsitään annettujen osajoukkojen $A$ ja $B$ välinen etäisyys

$$d(A,B) = \inf\{d(f_n, f) : f_n \in A, f \in B\},$$

missä $d(f_n, f)$ on sup-normin määräämä metriikka joukossa $E$:

$$d(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty.$$

Esitetään tehtävään kaksi hieman erilaista lähestymistapaa:

*Vaihtoehto 1.* Tutkitaan tilannetta ensin tapauksessa $f_1 = x$ ja $f = 1/2$. Selvästi

$$d(x, 1/2) = \sup\{|x - 1/2| : 0 \leq x \leq 1\} = 1/2,$$

jolloin $d(A, B) \leq d(x, 1/2) = 1/2$. Esitetään tämän pohjalta 'sivistynyt arvaus':

**Väite.** $d(A, B) = 1/2$.

*Todistus.* Ylläolevan nojalla riittää osoittaa että $d(A, B) \geq 1/2$. Olkoot funktiot $f_n \in A$ ja $f \equiv c \in B$ mielivaltaisia. Tällöin

$$\begin{aligned} d(f_n, c) &= \sup\{|f_n(x) - c| : 0 \leq x \leq 1\} \geq \max\{|f_n(1) - c|, |f_n(0) - c|\} \\ &= \max\{|1 - c|, |c|\} \geq 1/2 \end{aligned}$$

kaikilla $c \in \mathbb{R}$. Siispä $d(A, B) = \inf\{d(f_n, c)\} \geq 1/2$ ja väite on todistettu. $\square$

*Vaihtoehto 2.* Joukon $E$ funktiot ovat rajoitettuja suljetulla välillä, joten sup-normille pätee

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} = \max\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\},$$

ja etäisyydelle saadaan lauseke

$$d(A, B) = \inf\left\{\max\{|f_n(x) - f(x)|\} : f_n \in A, f \in B\right\}.$$

Tarkastellaan maksimilauseketta vakiofunktioille $f(x) = c \in \mathbb{R}$ joukossa $B$. Tällöin kaikilla funktioilla $f_n \in A$

$$\max\{|f_n(x) - c|\} = \begin{cases} c & \text{kun } c > 1 \\ \max\{c, 1 - c\} & \text{kun } 0 \leq c \leq 1 \\ |c| + 1 & \text{kun } c < 0 \end{cases}$$

Näiden lukujen minimi ja samalla suurin alaraja saavutetaan vakiofunktiolla $c = 1/2$ ja tällöin

$$d(A, B) = 1/2.$$