RATKAISUEHDOTUKSIA, HARJOITUS 1

MARTINA AALTONEN

1. a) Aina totta.
   b) Ei aina totta.
   c) Aina totta.
   d) Totta.

2. a) Väite: Luku $\sup(A)$ on yksikäsitteisesti määrätty.

   Todistus. Oletetaan, että luvut $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ toteuttavat $a_1 = \min(S)$ ja $a_2 = \min(S)$. Tällöin $a_1 \leq a_2$ ja $a_2 \leq a_1$, joten $a_1 = a_2$. Siten $\sup(A)$ on yksikäsitteisesti määrätty lukuna $\min(S)$. □

   b) Väite: Luku $\sup(A) = \max(A)$, jos luku $\max(A)$ on olemassa.

   Todistus. Koska $\max(A) \in A$, pätee $\max(A) \leq \sup(A)$. Koska $\max(A)$ on joukon A yläraja, pätee $\sup(A) \leq \max(A)$. Näin ollen $\sup(A) = \max(A)$. □

   c) Väite: Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen alkio $x \in A$, joka toteuttaa $x > \sup(A) - \epsilon$.

   Todistus. Tehdään vastaoletus, että väitteen lukua x ei ole olemassa. Tällöin kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq \sup(A) - \epsilon$. Näin ollen pätee $\sup(A) - \epsilon \in S$, joten pätee $\sup(A) \neq \min(S)$, mikä on ristiriita. Tästä päätellään, että vastaoletus on väärä ja on olemassa sellainen $x \in A$, joka toteuttaa $x > \sup(A) - \epsilon$. □

3. A : Tapauksessa $A = [0, 1[$ saadaan, että $\sup(A) = 1$, $\inf(A) = \min(A) = 0$ ja lukua $\max(A)$ ei ole olemassa.

   B : Tapauksessa $B = \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ saadaan, että $\sup(B) = \max(B) = 1$, $\inf(B) = 0$ ja lukua $\min(B)$ ei ole olemassa.

4. a) $a(x - y) = -3(1 - 2, -2 - (-2), 1 - (-1)) = (3, 0, -6)$
   b) $|a||x - y| = |-3||(-1, 0, 2)| = 3\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}$
   c) $|a|(|x| - |y|) = |-3|(|(1, -2, 1)| - |(2, -2, -1)|) = 3(\sqrt{6} - \sqrt{9})$
   $= 3(\sqrt{6} - 3)$
   d) $a(x \cdot y) = -3(1 * 2 + (-2) * (-2) + 1 * (-1)) = -3 * 5 = -15$
   e) $|a||x||y| = |-3| * |\sqrt{6}| * |3| = 9\sqrt{6}$

Date: September 9, 2015.

f) $x \cdot (|a| * y) = (1, -2, 1) \cdot |-3|(2, -2, -1) = (1, -2, 1) \cdot (6, -6, -3)$
$= 1 * 6 + (-2) * (-6) + 1 * (-3) = 15$

5. Väite: Joukko $A^{\perp}$ on sisätuloavaruuden E vektorialiavaruus.

Todistus. Selvästi $0 \in A^{\perp}$, joten $A^{\perp}$ on epätyhjä. Tulee osoittaa, että $A^{\perp}$ on suljettu yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen. Olkoot $x_1, x_2 \in A^{\perp}$ ja olkoon $y \in A$ mielivaltainen. Tällöin

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = 0 + 0 = 0,$$

joten $x_1 + x_2 \in A^{\perp}$. Olkoot sitten $x \in A^{\perp}$ and $a \in \mathbb{R}$. Tällöin mielivaltaisella $y \in A$ pätee

$$\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle = a \cdot 0 = 0,$$

joten $ax \in A^{\perp}$.

□

6. Integraalin ei-negatiivisuuden perusteella $\langle f, g \rangle$ on reaaliluku. Käydään läpi sisätulon postulaatit S1–S5:

S1: Toteutuu selvästi.

S2: Ei toteudu. Eräs vastaesimerkki saadaan valitsemalla $a = -1$ ja $f = g = x$, jolloin

$$\langle -x, x \rangle = \sqrt{5}/5 \neq -\sqrt{5}/5 = -1\langle x, x \rangle.$$

S3: Ei toteudu. Eräs vastaesimerkki saadaan valitsemalla $f(x) = 1$, $g(x) = x$ ja $h(x) = x$.

Todistus. Laskemalla saadaan:

$$\langle f + g, h \rangle = \sqrt{\int_0^1 ((1+x)^2 x^2) dx} = \sqrt{\int_0^1 (x^2 + 2x^3 + x^4) dx} = \sqrt{7/10},$$

$$\langle f, h \rangle = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{1/3}$$

ja

$$\langle g, h \rangle = \sqrt{\int_0^1 x^4 dx} = \sqrt{1/5}.$$

Näin ollen $\langle f + g, h \rangle < \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$, ja on löydetty kuvaukset $f, g, h \in C([0, 1])$, jotka eivät toteuta postulaattia S3.

□

S4: Toteutuu, koska neliöön korotetut kuvaukset ja niiden muodostamat tulokuvaukset ovat ei-negatiivisia kuvauksia ja ei-negatiivisen kuvauksen integraali on ei-negatiivinen ja samoin ei-negatiivisen kuvauksen neliöjuuri.

S5: Toteutuu; $\langle f, f\rangle = (\int_0^1 f(x)^4\,dx)^{1/2}$, jossa integrandi on ei-negatiivinen jatkuva kuvaus $x \mapsto f(x)^4$. Tällöin tunnetusti integraali on nolla, ja siten myös juuri, vain kun integrandi on nollafunktio, siis pätee $f = 0$.