RATKAISUEHDOTUKSIA, HARJOITUS 6

MARTINA AALTONEN

1.) a) Olkoon $a \in A$ ja $\epsilon > 0$. Tällöin $B_{B^2}(a,\epsilon) \cap A \neq \varnothing$ ja $B_{B^2}(a,\epsilon) \cap B^2 \setminus A \neq \varnothing$, (missä $B_{B^2}(a,\epsilon) = B_{\mathbb{R}^2}(a,\epsilon) \cap B^2$), joten $a \in \partial A$ ja saadaan $A \subset \partial A$. Toisaalta $A \subset B^2$ on suljettu, koska $B^2 \setminus A \subset B^2$ on avoin. Siten $\partial A \subset A$ ja pätee $\partial A = A$.

b) Joukon A reuna ∂A avaruudessa B^2 on joukko $\{(x,y) \in B^2 \mid x + y = 0\}$. Koska joukon A reuna on epätyhjä, eikä sisälly joukkoon A, ei joukko A ole suljettu avaruudessa B^2.

2.) Polynomifunktiot ovat jatkuvia. Lauseen 7.13 soveltamiseksi halutaan kuvauksen f olevan paloittain määritelty suljetuilta väleiltä. Laskemalla polynomien $-x^2+1$ ja $-2x^2+x+1$ arvo pisteessä $x = 0$ saadaan

$$-(0)^2 + 1 = 1 = -2(0)^2 + 0 + 0$$

ja laskemalla polynomien $-2x^2+x+1$ ja $x - x^6$ arvo pisteessä $x = 1$ saadaan

$$1 - 1^6 = 0 = -2(1)^2 + 1 + 0.$$

Siten kuvauksen f määrittely voidaan antaa muodossa:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{jos } -1 \le x \le 0; \\ -2x^2+x+1 & \text{jos } 0 \le x \le 1; \\ x - x^6 & \text{jos } 1 \le x \le 2. \end{cases},$$

jolloin kuvauksen f jakuvuus seuraa suoraan lauseesta 7:13.

3.) Joukko A voidaan esittää yhdisteenä tason suljetusta oikeasta yläneljänneksestä ja y-akselista. Piste $y \in \mathbb{R}^2$ kuuluu joukon A reunaan avaruudessa $\mathbb{R}^2$ jos ja vain jos kaikki pisteen y kuula-ympäristöt $B(y,r) \subset \mathbb{R}^2$ leikkaavat sekä joukkoa A, että joukkoa $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Tästä saadaan

$$\partial_{\mathbb{R}^2}(A) = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\infty[\,\}.$$

Joukko A on suljettu, koska $\partial(A) \subset A$. Suljetun joukon sulkeuma on (minimaalisuuden nojalla) joukko itse, joten $\overline{A}_{\mathbb{R}^2} = A$. Joukon sisäpisteiden joukko löydetään aina poistamalla joukosta sen reuna. Siten saadaan

$$\mathrm{int}_{\mathbb{R}^2}(A) = A \setminus \partial_{\mathbb{R}^2}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}.$$

4.) Joukko Y on yhdiste tason suljetusta oikeasta yläneljänneksestä ja suljetusta vasemmasta alaneljänneksestä. Piste $y \in Y$ kuuluu joukon A reunaan avaruudessa Y jos ja vain jos jokainen pisteen y ympäristö $U \subset Y$ leikkaa sekä joukkoa A, että joukkoa $Y \setminus A$. Tästä saadaan

$$\partial_Y(A) = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0,\infty[\,\}.$$

Date: October 7, 2015.

Joukko A on suljettu, koska $\partial(A) \subset A$. Siten $\overline{A} = A$. Joukon sisäpisteiden joukko löydetään poistamalla joukosta sen reuna, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}\mathrm{int}_Y(A) &= A \setminus \partial_Y(A) = A \setminus \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \,]-\infty, 0]\}\\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\} \setminus \{(0,0)\}.\end{aligned}$$

(Vaihtoehtoinen ratkaisutapa * löytyy mallien lopusta.)

5.) Osoitetaan ensin, että A on suljettu avaruudessa Y. Tehdään vastaoletus, että A ei ole suljettu avaruudessa $Y = A \cup B$. Tällöin on olemassa $x \in \mathrm{Cl}_Y(A) \setminus A \subset \mathrm{Cl}_Y(A) \cap B \subset \overline{A} \cap B = \varnothing$, mikä on ristiriita. Näin ollen A on suljettu avaruudessa Y. Vastaavasti voidaan osoittaa, että B on suljettu avaruudessa Y.

Toisaalta pätee $A \cap B = \varnothing$, joten pätee $A = Y \setminus B$ ja $B = Y \setminus A$. Siten joukot A ja B ovat suljettujen joukkojen komplementteina avoimia avaruudessa Y.

Joukot A ja B eivät välttämättä ole suljettuja avaruudessa X. Esimerkiksi kelpaa $X = \mathbb{R}$, $A = \{1\}$ ja $B = \,]-100, -50[\,$.

6.) Olkoon $\varepsilon > 0$. Kuvauksen $f|A$ jatkuvuuden perusteella on olemassa sellainen $\delta_1 > 0$, joka toteuttaa

$$f|A(B_A(a, \delta_1)) \subset B(f(a), \varepsilon),$$

missä $B_A(a, \delta_1) = B(a, \delta_1) \cap A$. Koska $\mathrm{int}A \subset X$ on avaruuden X avoin osajoukko, pätee $B(a, \delta_2) \subset \mathrm{int}A$, jollakin $\delta_1 \geq \delta_2 > 0$. Erityisesti luvulla $\delta_2 > 0$ pätee

$$f(B(a, \delta_2)) = f_A(B_A(a, \delta_2)) \subset f|A(B_A(a, \delta_1)) \subset B(f(a), \varepsilon),$$

joten kuvaus f jatkuva.

Lause: *Olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus ja $X = \cup_I U_i$, missä $U_i \subset X$ on avoin kaikilla $i \in I$. Tällöin kuvaus $f\colon X \to Y$ on jatkuva jos ja vain jos rajoittumakuvaus $f|U_i$ on jatkuva kaikilla $i \in I$.*

* *Vaihtoehtoinen ratkaisutapa tehtävään 4 (Lars Lamberg):* Lasketaan ensin joukon A ja sen komplementin $B := Y \setminus A$ sulkeumat avaruudessa Y : tehtävän 3. nojalla $\overline{A}_{\mathbb{R}^2}(A) = A$, joten

$$\overline{A}_Y(A) = \overline{A}_{\mathbb{R}^2}(A) \cap Y = A \cap Y = A.$$

Merkitään

$$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0, y \leq 0\}$$

ja

$$D = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}.$$

Tällöin $C = B \cup D$. Koska projektiot $\mathrm{pr}_k\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, k = 1, 2$, ovat jatkuvia ja tunnestusti väli $]-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ on suljettu, joukko $C = \mathrm{pr}_1^{-1}\,]-\infty, 0] \cap \mathrm{pr}_2^{-1}\,]-\infty, 0]$ on suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$. Koska lisäksi $B \subset C$, sulkeuman minimiominaisuuden nojalla

$$\overline{B} \subset C.$$

Toisaalta, jos $z = (x, y) \in D$, niin selvästi $z \in \overline{B}$, siis $D \subset \overline{B}$, joten

$$C \subset \overline{B}.$$

Siten $\overline{B} = C$. Saadaan

$$\mathrm{Cl}(Y \setminus A)_Y = \overline{B} \cap Y = C \cap Y = C.$$

Koska reuna on aina joukon sulkeuman ja sen komplementin sulkeuman leikkaus saadaan edelleen

$$\partial_Y(A) = \mathrm{Cl}_Y(A) \cap \mathrm{Cl}(Y \setminus A)_Y = A \cap C = D.$$

Lopuksi

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(A) &= \mathrm{Cl}(A) \setminus \partial_Y(A) = A \setminus D \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}. \end{aligned}$$

Pätee $\partial_Y(A) \subset \partial_{\mathbb{R}^2}(A)$, eikä sattuma (syy $Y \subset \mathbb{R}^2$.)