MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I, syksy 2015
Ratkaisuita harjoituksiin 12
Matti Palomäki

1. *Väite.* Kuvaus f on upotus.

   Todistus. Kuvaus f on jatkuva, sillä sen komponenttifunktiot $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto x - 2y^2$ ja $(x, y) \mapsto y - 2x^2$ ovat jatkuvat.

   Olkoon $(s, t, u) \in fS^1$. Sille on siis ainakin yksi $(x, y) \in S^1$, jolla $f(x, y) = (s, t, u)$. Yhtälöistä $s = x$ ja $u = y - 2x^2$ nähdään, että pisteen (s, t, u) alkukuva on $(s, u + 2s^2)$ ja siis yksikäsitteinen. Kuvaus f on siis injektio.

   Selvästi S^1 on avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljettu ja rajoitettu osajoukko, joten se on kompakti.

   Kuvaus f on siis jatkuva injektio kompaktilta lähtöjoukolta S^1, joten lauseen 13.25 nojalla se on upotus. $\square$

2. *Väite.* $\overline{E}$ on yhtenäinen.

   Todistus. Joukon E sulkeuma on $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \geqslant |y|\}$, erityisesti $\mathbf{0} \in \overline{E}$. Olkoon $(x, y) \in \overline{E}$, tarkastellaan kuvausta $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$,

   $$\gamma(t) = ((1 - t)x, (1 - t)y).$$

   Sen komponenttikuvaukset $t \mapsto (1 - t)x = -xt + 1$ ja $t \mapsto (1 - t)y = -yt + 1$ ovat polynomeina jatkuvat joten γ on jatkuva ja polku. Koska $|x| \geqslant |y|$, myös $|(1 - t)x| \geqslant |(1 - t)y|$, joten $\gamma(I) \subset \overline{E}$. Lisäksi $\gamma(0) = (x, y)$ ja $\gamma(1) = \mathbf{0}$. Mielivaltaiselle sulkeuman $\overline{E}$ pisteelle löytyy sulkeumasta siten janapolku, joka yhdistää kyseisen pisteen origoon.

   Näin ollen, kun (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ovat avaruuden $\overline{E}$ pisteitä, murtoviiva $\mathrm{mur}((x_1, y_1), \mathbf{0}, (x_2, y_2)) \subset \overline{E}$. Sulkeuma $\overline{E}$ on siis murtoviivayhtenäinen.

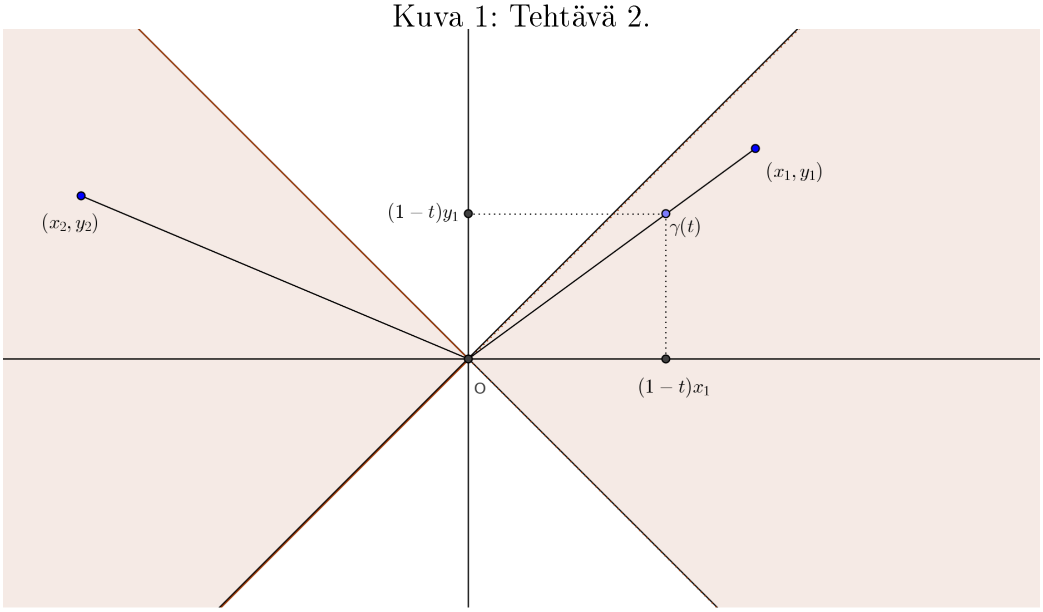
   Lauseen 14.27 mukaan murtoviivayhtenäisenä avaruutena $\overline{E}$ on yhtenäinen. $\square$

3. *Väite.* Joukko A_1 on yhtenäinen.

   Todistus.

   Olkoon $(x, y) \in A_1$. Kuten tehtävässä 2. tarkastellaan janapolkua $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = ((1 - t)x, (1 - t)y)$.

Kuva 1: Tehtävä 2.



Koska $x^2/3 + y^2 \leqslant 4$, niin kun $0 \leqslant t \leqslant 1$, pätee

$$\frac{(\,(1-t)x\,)^2}{3} + (\,(1-t)y\,)^2 \leqslant \frac{x^2}{3} + y^2 \leqslant 4,$$

joten $\gamma(I) \subset A_1$. Lisäksi $\gamma(0) = (x, y)$ ja $\gamma(1) = \mathbf{0}$. Mielivaltaisen joukon A_1 pisteen yhdistää siis origoon janapolku joukossa.
Olkoot nyt (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) avaruuden $\overline{A_1}$ pisteitä. Äskeisen nojalla murtoviiva $\operatorname{mur}\big(\,(x_1, y_1), \mathbf{0}, (x_2, y_2)\,\big)$ kuuluu joukkoon A_1, joten A_1 on murtoviivayhtenäinen.

Lauseen 14.27 mukaan murtoviivayhtenäisenä A_1 on yhtenäinen. $\square$

4. *Väite.* A on yhtenäinen.

   Todistus.
   Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (1 - \cos x e^x + \sin y, x, y)$. Kuvauksen f komponenttikuvaukset, ja siten myös kuvaus itse, ovat jatkuvia. Selvästi $f\mathbb{R}^2 \subset A$, lisäksi kaikilla $(x, y, z) \in A$ on alkukuva $(y, z) \in \mathbb{R}^2$, joten kuva $f\mathbb{R}^2$ on A. Koska $\mathbb{R}^2$ on yhtenäinen, on nyt lauseen 14.16 nojalla myös A yhtenäinen. $\square$

5. Olkoot α ja β kuvatunlaiset polut.
   Halutaan, että γ aloittaa pisteestä $\alpha(0)$, saavuttaa pisteen $\alpha(1) = \beta(0)$ jollain $0 < t_v < 1$ ja päätyy pisteeseen $\beta(1)$. Valitaan selvyyden vuoksi

$t_v = \frac{1}{2}$ ja kuljetaan polulla γ polut α ja β "tuplanopeudella".
Määritellään

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{, kun } t \leqslant \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \text{, kun } t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nyt $\gamma(0) = \alpha(2 \cdot 0)$, $\gamma(\frac{1}{2}) = \alpha(2 \cdot \frac{1}{2}) = \beta(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$ ja $\gamma(1) = \beta(2-1)$ kuten pitikin, ja lauseen 7.13 nojalla γ on jatkuva ja siten polku.

Määritellään tämän polun kuvaa "takaperin" kulkeva polku: $\eta : I \to X$, $t \mapsto \gamma(1-t)$.
Nähdään, että $\eta(0) = \gamma(1)$ ja $\eta = \gamma(0)$, ja $\eta(t) = \gamma \circ (1-t)(t)$ on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva ja siis polku. Vielä samoin kuin polulla γ, on polun η kuva $\alpha(I) \cup \beta(I)$.

6. *Väite.* Tehtävänannon x on olemassa.

   Todistus. Määritellään ohjeen mukaisesti kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$,
   $f(x) = d(x, A) - d(x, B)$. Selvästi f on jatkuva.
   Olkoon $a \in A$, $a \notin B$. Koska B on suljettu, on $d(a, B) > 0$. Koska $a \in A \subset \partial G \subset \overline{G}$, löytyy piste $a' \in G \cap B(a, \frac{d(a,B)}{3})$. Kolmioepäyhtälön mukaan on siis $d(a', B) \geqslant \frac{2}{3} d(a, B)$ ja näin ollen pisteelle a' pätee $d(a', A) < d(a', B)$ ja siten $f(a') < 0$.
   Aivan vastaavasti on olemassa $b' \in G$ jolle $d(b', B) < d(b', A)$ ja siten $f(b') > 0$.

   Alueena G on yhtenäinen, joten lauseen 14.19 mukaan jatkuva kuvaus f saa joukossa G kaikki arvot väliltä $f(a')$ ja $f(b')$, eli löytyy $x \in G$ jolle $f(x) = 0$. Pisteessä x on siis $d(x, A) - d(x, B) = 0$ ja siten
   $d(x, A) = d(x, B)$. $\square$