RATKAISUEHDOTUKSIA, HARJOITUS 10

1.) Joukko A_1 on selvästi suljettu ja rajoitettu. Tarkemmin: kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2/3 + y^2 - 4$, on polynomina jatkuva ja $A_1 = f^{-1}]-\infty, 0]$ suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$ lauseen 6.13 perusteella. Merkitään $z = (x,y) \in A_1$. Tällöin

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \leq x^2 + 3y^2 \leq 3 \cdot 4 = 12,$$

joten $A_1 \subset \mathbb{R}^2$ on rajoitettu. Lauseen 13.14 nojalla A_1 on kompakti ja lauseiden 12.5-6 nojalla se on täydellinen.

Joukko A_2 on selvästi suljettu, mutta rajoittamaton. Tarkemmin: kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2y^2 - 1$, on jatkuva ja siten $A_2 = f^{-1}\{0\}$ on suljettu lauseen 6.13 perusteella. Olkoon sitten $x > 0$. Tällöin $(x, 1/x) \in A_2$, sillä $x^2(1/x)^2 = 1$. Näin ollen A_2 on rajoittamaton. Lauseen 13.14 nojalla A_2 ei ole kompakti, mutta lauseiden 12.5-6 nojalla se on täydellinen.

Joukko A_3 on selvästi rajoitettu, mutta se ei ole suljettu. Nimittäin $z = (2,0) \notin A_3$, mutta jokaisella $\epsilon > 0$ pätee $u = (2-\epsilon/2, 0) \in B(z,\epsilon) \cap A_3$, siis $z \in \overline{A_3}$, joten $A_3 \neq \overline{A_3}$ ja A_3 ei ole suljettu. Lauseiden 13.14 ja 12.5-6 nojalla A_3 ei ole kompakti eikä täydellinen.

2.) Lauseen 13.14 nojalla A on kompakti. Kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos^2 x + 2\sin^2 y$, on tunnetusti jatkuva ja näin on myös sen rajoittuma $g := f|A$. Heine-Borelin (lause 13.21) nojalla g saavuttaa joukossa A suurimman ja pienimmän arvonsa. Erityisesti löytyy sellainen $(a,b) \in A$, että

$$\cos^2 x + 2\sin^2 y = g(x,y) \leq g(a,b) = \cos^2 a + 2\sin^2 b$$

kaikissa pisteissä $(x,y) \in A$.

3.) Väite: Kuvaus f on tasaisesti jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

Todistus. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska kuvaus f on tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}^n \setminus B^n$, löytyy sellainen $\delta_1 > 0$, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ aina kun $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$ ja $|x - y| < \delta_1$. Valitaan $r = 1 + \delta_1$; lauseen 13.14 nojalla suljettu kuula $\overline{B} = \overline{B} = \overline{B}(\overline{0}, r)$ on kompakti, ja jatkuvana funktiona f on lauseen 13.36 nojalla siinä tasaisesti jatkuva; löytyy siis sellainen $\delta_2 > 0$, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ aina kun $x, y \in \overline{B}$ ja $|x - y| < \delta_2$. Olkoon $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tällöin, jos $x, y \in \mathbb{R}^n$ ja $|x - y| < \delta$, niin joko pätee $x, y \in \overline{B}$ tai pätee $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$. Nimittäin, jos toinen, sanotaan $x \notin \overline{B}$, niin

$$|y| > |x| - \delta \geq |x| - \delta_1 > r - \delta = 1 + \delta_1 - \delta_1 = 1,$$

Date: November 18, 2015.

joten myös $y \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$ (tietysti $x \notin B^n$ implikoi $x \in \mathbb{R} \setminus B^n$.) Kummassakin tapauksessa $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, toisin sanoen f on tasaisesti jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

□

4.) Väite: Kuvaus f on tasaisesti jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}$.

Todistus. Tunnestusti f on jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}$. Lisäksi $f'(x) = 1/5x^{-4/5} = 1/(5x^{4/5})$, joten joukossa $\mathbb{R} \setminus B^1$, (missä $B^1 = \,]-1, 1[$), pätee

$$|f'(x)| = \frac{1}{5|x|^{4/5}} \leq 1/5.$$

Sovelletaan väliarvolausetta väleihin $]\infty, -1]$ ja $[1, \infty[$: jos pisteet x ja y kuuluvat kumpikin jompaan kumpaan väleistä saadaan

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq 1/5|x - y|,$$

jollakin $c \in \,]x, y[$. Siten f on 1/5-Lipschitz joukossa $\mathbb{R} \setminus B^1 = \,]\infty, -1] \cup [1, \infty[$ ja siten tasaisesti jatkuva siinä. Edellisen tehtävän tuloksen nojalla kuvaus f on tasaisesti jatkuva koko joukossa $\mathbb{R}$. □

5.) Väite: Löytyy sellaiset $a \in A$ ja $b \in B$, että $||a - b|| = d(A, B)$.

Todistus. Lauseen 13.22 nojalla löytyy sellainen $a \in A$, että $d(A, B) = d(a, B)$. Kiinnitetään $y_0 \in B$ ja merkitään $r = ||y_0 - a|| > 0$, jolloin $C := B \cap \overline{B}(a, r) \neq \varnothing$, sillä $y_0 \in C$. Lisäksi C on suljettujen joukkojen äärellisenä leikkauksena suljettu $\mathbb{R}^n$:ssä ja tietenkin rajoitettu. Lauseen 13.14 nojalla se on kompakti, ja lauseen 13.22 nojalla löytyy sellainen $b \in C$, että $r \geq d(a, C) = ||a - b||$. Jos $y \in B$ niin joko pätee $y \in C$ tai pätee $||y - a|| > r$. Kummassakin tapauksessa $||y - a|| \geq ||b - a||$, joten $d(A, B) = d(a, B) \geq ||a - b||$. Siis $d(A, B) = ||a - b||$, $a \in A$ ja $b \in B$. □

Huomautus: Oletus erillisyydestä on turha.

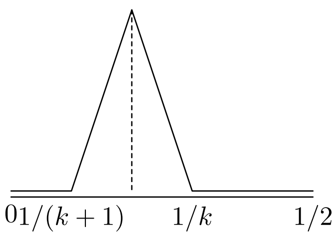
6.) a) Väite: Joukko A ei ole kompakti.

Todistus. Tarkastellaan mainittua jonoa (x_k). Olkoon (x_{k_m}) sen mikä tahansa osajono. Tällöin $d(x_{k_m}, x_{k_p}) \geq r$ kaikilla $m \neq p$, sillä tällöin $k_m \neq k_p$. Siten (x_{k_m}) ei ole Cauchy, joten se ei myöskään suppene. Koska jonolla (x_k) ei ole suppenevaa osajonoa, joukko A ei ole kompakti. □

b) Väite: Avaruuden $E = C([a, b], \mathbb{R})$ yksikkökuula $\overline{B}$ ei ole kompakti.

Todistus. Määritellään kuvan (seuraavalla sivulla) osoittamalla tavalla suoraviivaisesti funktiot $f_k \colon [0, 1] \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Lauseen 7.13 nojalla funktiot f_k ovat jatkuvia, siis $f_k \in E$, $k \in \mathbb{N}$. Olkoon

$$x_k = 1/2(1/k + 1/(k + 1)) = \frac{2k + 1}{2k(k + 1)}$$



ja $m \neq k$. Tällöin $f_k(x_k) = 1$, mutta $f_m(x_k) = 0$. siten $d(f_k, f_m) = ||f_k - f_m||_\infty \geq 1$ aina kun $k \neq m$. Kohdan a) nojalla joukko E ei ole kompakti.

$\square$