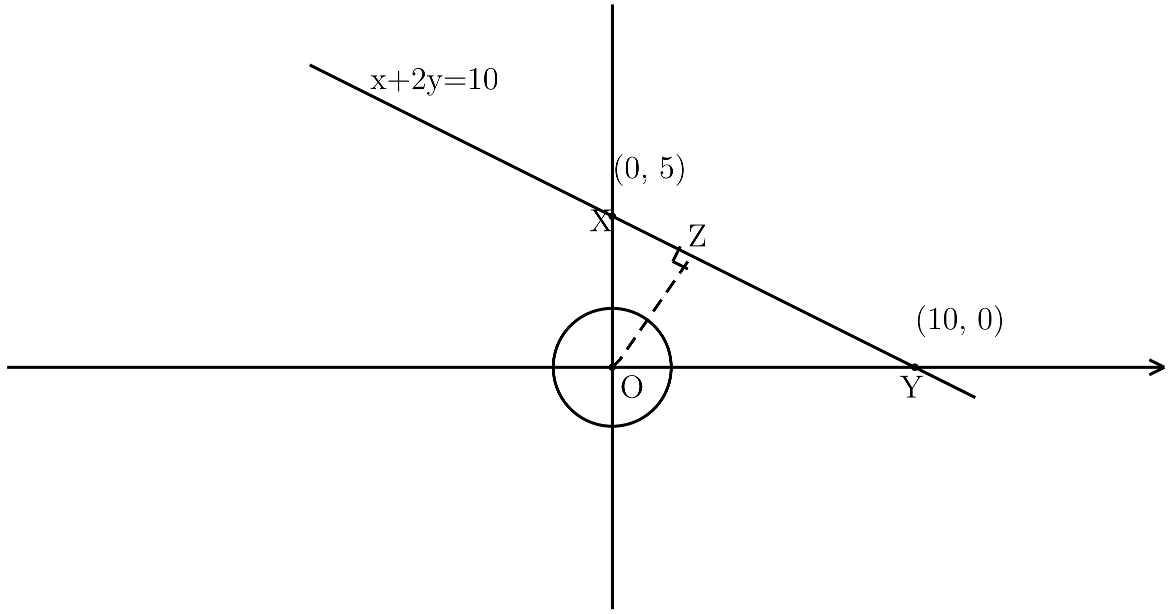
Topologia I, syksy 2015.
Harjoitus 3.
Ratkaisuehdotuksia.
Aleksandr Pasharin.

1. Piirretään kuva tilanteesta:



Koska origokeskinen pallo on täysin symmetrinen tason kiertojen suhteen ja kierrossa jokainen suora voidaan muuntaa vaikkapa vaakasuoraksi, on melko selvä, että pienin etäisyys joukkojen A ja B pisteiden välillä on suoran $x + 2y = 10$ etäisyys origosta miinus kaksi. Suoran $x + 2y = 10$ etäisyys origosta (kuvassa $|OZ|$) selviää helpoitten tarkastelemalla samanmuotosia suorakulmaisia kolmioita OXY ja ZXO. Tästä saadaan $|OZ| = 2\sqrt{5}$, joten $d(A, B) = 2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5} - 1)$.

2. a) Ei ole metriikka, sillä kolmioepäyhtälö, joka olisi tässä tapauksessa epäyhtälö

$$|x - z|^2 \leq |x - y|^2 + |y - z|^2$$

ei päde kaikilla x, y, z. Vasta-esimerkki: kun $x = 1$, $y = 0$, $z = -1$ pätee

$$4 = |x - z|^2 > |x - y|^2 + |y - z|^2 = 2.$$

b) Osoitetaan ensin, että kaikilla $a, b \geq 0$ pätee

$$\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}. \tag{1}$$

Koska tämän epäyhtälön kumpikin puoli on ei-negatiivinen, se on ekvivalentti epäyhtälön

$$a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \tag{2}$$

kanssa, joka saadaan korottamalla (1) neliöön. Koska $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$, epäyhtälö (2) selvästi pitää paikkansa kaikilla $a, b \geq 0$. Näin ollen myös (1) on tosi kaikilla $a, b \geq 0$.

Osoitetaan tämän avulla, että metriikka g toteuttaa kolmioepäyhtälön. Olkoot x, y, z reaalilukuja. Tällöin

$$g(x,z) = \sqrt{|x-z|} = \sqrt{|x-y+y-z|} \overset{(i)}{\leq}$$

$$\sqrt{|x-y|+|y-z|} \overset{(ii)}{\leq} \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|} = g(x,y) + g(y,z).$$

Tässä kohdassa (i) käytetään tavallista itseisarvon $|\cdot|$ kolmioepäyhtälöä sekä sitä, että neliöjuuri on kasvava funktio. Kohdassa (ii) sovelletaan edellä todistettua epäyhtälöä (1).

Osoitetaan vielä muut metriikan postulaatit todeksi. Symmetrisyys $g(x,y) = g(y,x)$ on selvä. Lisäksi $g(x,y) = \sqrt{|x-y|} \geq 0$ ja $g(x,y) = 0$ jos ja vain jos $|x-y| = 0$ eli jos ja vain jos $x = y$.

3. Olkoot $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ ja $x \in [0,1]$. Tällöin

$$|f_n(x) - f_m(x)| = x^n - x^m \leq 1,$$

joten $|f_n - f_m|_\infty \leq 1$. Tästä seuraa, että $d(A) \leq 1$. Osoitetaan, että itse asiassa $d(A) = 1$. Tehdään vasta-oletus: $d(A) = s < 1$. Tällöin siis erityisesti kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$, $m > n$ ja kaikilla $x \in [0,1]$ pätee

$$|f_n(x) - f_m(x)| = x^n - x^m \leq |f_n - f_m|_\infty \leq s. \tag{3}$$

Valitaan x siten, että $s < x < 1$. Koska tällöin (tuttua analyysin kursseilta, huom. $x < 1$) pätee

$$\lim_{n\to\infty} |f_1(x) - f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} x - x^n = x > s,$$

on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että $|f_1(x) - f_n(x)| > s$. Tämä on ristiriidassa epäyhtälön (3) kanssa. Näin ollen $d(A) = 1$.

4. a) ei ole avoin.
b) ja c) ovat avoimia.

5. Olkoon $r \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Riittää osoittaa, että

$$A_r = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}, q<r} A_q,$$

sillä tällöin A_r on avoin avointen joukkojen yhdisteenä (Lause 3.4.). On selvä, että $A_q \subset A_r$ jos $q < r$, joten

$$\bigcup_{q\in\mathbb{Q}, q<r} A_q \subset A_r.$$

Kääntäen oletetaan, että $x \in A_r$ eli $f(x) < r$. Koska $\mathbb{Q}$ on tiheässä $\mathbb{R}$:ssä, on olemassa $q \in Q$ siten, että $f(x) < q < r$. Erityisesti tällöin $x \in A_q$, missä $q \in \mathbb{Q}$ ja $q < r$. Näin ollen

$$A_r \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}, q < r} A_q.$$

6. a) Normin ehdosta (N3) seuraa itse asiassa suoraan, että ainoa avaruuden E alkio, joka *ei* kuulu joukoon A on nollafunktio 0. Näin ollen A on yksiön $\{0\}$ komplementti. Esimerkin 3.2.2. (Väisälä) nojalla tällainen joukko on metrisessä avaruudessa aina avoin. Näin ollen A on avoin.

   b) Osoitetaan, että B on avoin. Olkoon $f \in B$. Heinen-Borelin lauseen (tuttu analyysin kurssilta) mukaan f saavuttaa miniminsä $c = \min\{f(x) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ jossakin pisteessä $a \in [0, 1]$. Koska $f \in B$, kaikilla $x \in [0, 1]$ pätee $f(x) \geq f(a) = c > 0$. Näytetään, että

$$B(f, c) \subset B.$$

   Olkoon $g \in B(f, c)$; tällöin kaikilla $x \in [0, 1]$ pätee

$$|g(x) - f(x)| \leq \ |g - f\ |_\infty < c.$$

   Tästä saadaan (itseisarvon ominaisuudet!), että kaikilla $x \in [0, 1]$ pätee

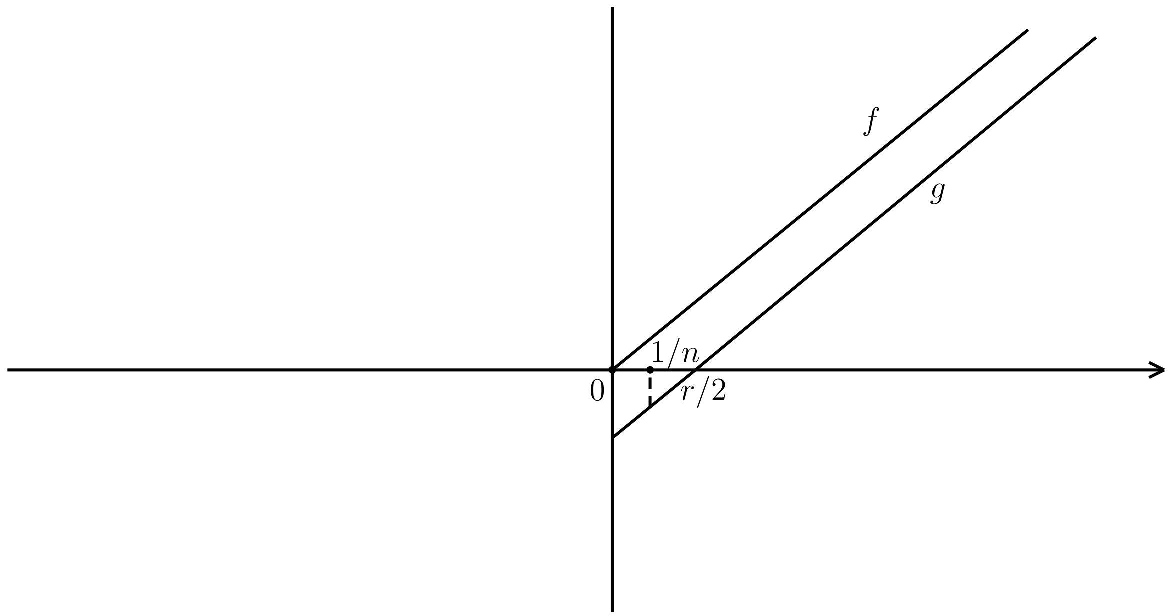
$$g(x) \geq f(x) + (g(x) - f(x)) \geq c - |g(x) - f(x)| > c - c = 0,$$

   toisin sanoen $g \in B$.

   On osoitettu, että jokaiselle $f \in B$ löytyy tarpeeksi "pieni" (avoin) kuula $B(f, c)$, joka sisältyy joukkoon B. Tämä tarkoittaa sitä, että B on avoin.

   c) Olkoon $f \in E$, $f(x) = x$. Tällöin $f \in C$. Osoitetaan, että kaikilla $r > 0$ kuula $B(f, r)$ ei ole joukon C osajoukko. Tästä seuraa välittömästi, että C ei ole avoin.

   Olkoon $r > 0$ mielivaltainen. Tällöin kaavalla $g(x) = x - r/2$, $0 \leq x \leq 1$ määritelty kuvaus on jatkuva, eli kuuluu avaruuteen E. Lisäksi $\ |f - g\ |_\infty = r/2 < r$, joten $g \in B(f, r)$. Koska $r > 0$, löytyy tarpeeksi iso $n \in \mathbb{N}$ jolle pätee $1/n < r/2$. Tällöin $g(1/n) < 0$, joten $g \notin C$. On osoitettu, että kuula $B(f, r)$ ei ole joukon C osajoukko millään $r > 0$. Näin ollen C ei ole avoin.


f
g
$1/n$
0
$r/2$