Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava 2. kurssikoe 19.1.2016

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. (a) Määrittele kuvauksen $f : X \to X$ kiintopiste.

(b) Esitä (lyhyesti) Banachin kiintopistelause, ilman todistusta. Lauseeseen liittyviä käsitteitä, edellä pyydetyn kiintopisteen lisäksi, ei tarvitse erikseen määritellä.

2. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukkoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^4 + y^2 \leq 1\}.$$

Onko se (a) kompakti, (b) yhtenäinen? Perustelut.

3. Tarkastellaan kuvausta $f = (f_1, f_2) : [0, 1] \to \mathbf{R}^2$,

$$f(t) = (\cos t, \tan t) \quad \text{kaikilla } t \in [0, 1].$$

Osoita että se on upotus.

4. Olkoon A sellainen avaruuden X osajoukko että se on tässä sekä avoin että suljettu, ja olkoon lisäksi $\emptyset \neq A \neq X$, mistä seuraa että avaruus X on epäyhtenäinen. Olkoon $\alpha : [0, 1] \to X$ sellainen polku X:ssä että $\alpha(0) \in A$. Osoita että tällöin $\alpha(t) \in A$ kaikilla $t \in [0, 1]$, siis että polku pysyy tällöin joukossa A.