

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Osoita että yhtälö

$$d(x, y) = |\ln x - \ln y|, \quad \text{kun } x, y \in X,$$

määrittelee metriikan joukossa $X =]0, \infty[$. Funktion $x \mapsto \ln x$ perusominaisuudet katsotaan tunnetuiksi.

2. Määrää perustellen joukon $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ reuna metrisessä avaruudessa $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$, jossa \mathbf{R}^2 :n indusoima tavallinen euklidinen metriikka. Selvästi $A \subset X$.

3. Tarkastellaan kuvausta

$$f = (f_1, f_2) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = (2x + y^2, x^2 - xy^3), \quad \text{kun } (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Avaruudessa \mathbf{R}^2 tavallinen euklidinen norminsa $\|*\|$ ja sen luoma metriikka. Osoita joukko U avoimeksi \mathbf{R}^2 :ssa, kun

$$U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \|f(x, y)\| < 7\}.$$

4. Olkoon D joukko; tarkastellaan rajoitettujen funktioiden $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ avaruutta $E = \text{raj}(D, \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in D\}.$$

Olkoot a ja $b \in D$ kiinnitettyjä. Osoita että kuvaus

$$\psi_{a,b} : E \rightarrow \mathbf{R}, \quad f \mapsto f(a) + 2f(b) + \sin(\pi/6), \quad \text{kun } f \in E,$$

on 3-Lipschitz ja siten jatkuva.