Topologia I
Harjoitus 8, syksy 2015

1 (9:5, muunnos). Konstruoi jokin homeomorfismi $f : B^2 \approx \mathbf{R}^2$, kun B^2 on tason avoin yksikkökiekko $B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$. Löydätkö käänteiskuvauksen?

Ohje. Liiku radiaalisti eli kerro yksikkövektoria $x/|x|$, ja sitä varten tarkastele vastavaa tilannetta $\mathbf{R}$:ssä (geometrisesti tai voit käyttää yhtä hyvin funktiota $\tan : [0, \pi/2[\to [0, \infty[$, joka tiedetään homeomorfismiksi).

2. Tarkastellaan jatkuvien funktioden avaruutta $E = C([0,1], \mathbf{R})$. Olkoot d ja e siinä metriikat, jotka siihen luovat normit $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ ja $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, kun $f \in E$. Osoita että $\tau_e \subset \tau_d$. Ovatko metriikat (normit) ekvivalentit?

Ohje. Identtinen kuvaus, erityisesti origossa.

3 (11:2). Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$ ja (x_k) jono A:ssa (siis $x_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$). Osoita että jonon kasautumisarvot kuuluvat sulkeumaan $\bar{A}$.

4. Tutki suppenevatko seuraavat $\mathbf{R}^2$:n jonot (x_k). Myönteisessä tapauksessa anna jonon raja-arvo. Kielteisessä tapauksessa tutki, onko jonolla edes yhtä suppenevaa osajonoa (ja siten kasautumisarvoa). Lyhyt esitys riittää.

(a) $x_k = \big((1/5)^k, 1^k\big)$, (b) $x_k = (2^{-k}, (-1)^k)$, (c) $x_k = \big(k^{1/2}, (-2)^{-k}\big)$.

5. Olkoot (x_k) ja (y_k) reaalilukujonoja, joilla $x_k \to 3\pi/4$ ja $y_k \to \sqrt{\pi}/2$. Merkitään $w_k = \sin(x_k - y_k^2)$. Osoita tarkasti että $w_k \to 1 = \sin(\pi/2)$.

Ohje. Käytä funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \sin(x - y^2)$, jonojatkuvuutta (lauseen 11.8 implikaatio (1) $\Rightarrow$ (2)) ja merkitse $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbf{R}^2$, jolloin $w_k = f(z_k)$.

6 (11:10, osaksi). Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funktio, joka kuvaa $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$ kun $x \in \mathbf{R}$. Tutki suppeneeko funktiojono (f_n)

(a) pisteittäin $\mathbf{R}$:ssä, (b) tasaisesti $\mathbf{R}$:ssä, (c) tasaisesti joukossa $]-\infty, 10^{10}]$.