Topologia I

Harjoitus 7, syksy 2015

1 (8:7 b). Vaikeana kahden pinnan tehtävä: Olkoot A ja B avaruuden X suljettuja joukkoja, joilla pätee $intA = intB = \emptyset$. Osoita että tällöin pätee myös $int(A \cup B) = \emptyset$.

2. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ kiinnitetty. Osoita että $[0, \infty[\approx]-\infty, a]$. Käytössä tavallinen euklidinen metriikka.

Ohje. Konstuoi tarvittava homeomorfismi ja osoita kyseinen kuvaus homeomorfismiksi.

3. Tarkastellaan $\mathbf{R}^3$:n pintaa $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \sin x + \cos y\}$ varustettuna euklidisella metriikalla. Pidetään tunnettuna, että kuvaus

$$f : A \to \mathbf{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x, y) \quad \text{kun } (x, y, z) \in A,$$

on bijektio. Osoita että se on homeomorfismi ja siten $A \approx \mathbf{R}^2$. Kuvaukset $\sin, \cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovat tunnetusti jatkuvia.

4. Onko funktio $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$, (a) Lipschitz-kuvaus, (b) bilipschitz-kuvaus, (c) upotus?

Ohje. Differentiaalilaskennan väliarvolause.

5. Olkoon $x \in X$ ja $\emptyset \neq A \subset X$. Ehto $d(x, A) > 0$ on topologinen ominaisuus (sulkeuma!). Tarkemmin, olkoon $f : (X, d) \approx (Y, e)$ homeomorfismi; osoita että todellakin $e(f(x), f(A)) > 0$ aina kun $d(x, A) > 0$.

Ohje. Sopivia lauseita ovat esimerkiksi 6.11 ja 6.12.

Huom. On syytä olla varovainen sen suhteen, mikä on tai ei topologinen ominaisuus. Esimerkiksi ominaisuus $d(A, B) > 0$ ei ole.

6 (10:1). Kuvaus $e : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $e(x, y) = \sqrt{|x - y|}$, on metriikka $\mathbf{R}$:ssä (ei tarvitse todistaa). Onko se (a) ekvivalentti, (b) bilipschitz-ekvivalentti $\mathbf{R}$:n tavallisen euklidisen metriikan d kanssa?

Ohje. Paras tutkia identtisen kuvauksen jatkuvuutta ja Lipschitz-jatkuvuutta näiden määritelmiin nojaten.