

Topologia I

Harjoitus 6, syksy 2015

1 (7:3 mukaelma). Muodosta joukon $A \subset B^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ sulkeuma ja reuna avaruudessa B^2 , kun

(a) $A = \{(x, 0) \in B^2 \mid -1 < x < 1\}$, (b) $A = \{(x, y) \in B^2 \mid x + y > 0\}$.

Mitkä A :t ovat suljettuja B^2 :ssa?

Ohje. Ehkä ensin sulkeumat \mathbf{R}^2 :ssa.

2. Olkoon kuvaus $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ määritelty yhtälöllä

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{kun } -1 \leq x \leq 0, \\ -2x^2 + x + 1, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \\ x - x^6, & \text{kun } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Osoita että se on jatkuva.

Ohje. Lause 7.13.

3. Olkoon

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0 \text{ ja } x \geq 0\}.$$

Määritä joukot $\text{int}A$, ∂A ja \bar{A} avaruudessa $X = \mathbf{R}^2$. Melko yksityiskohtainen perustelu.

4. Olkoon joukko A kuten edellisessä tehtävässä. Määritä joukot $\text{int}A$, ∂A ja \bar{A} avaruudessa $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$. Jälleen melko yksityiskohtainen perustelu.

Mikä yksinkertainen relaatio pätee reunojen $\partial_X A$ ja $\partial_Y A$ välillä? Sattuma?

5 (7:7). Olkoon $A, B \subset X$ ja $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. Osoita, että A ja B ovat avoimia ja suljettuja joukkoja avaruudessa $Y = A \cup B$, tämä varustettuna luonnollisesti X :stä periytyvällä indusoidulla metriikalla.

Ovatko A ja B välttämättä avoimia tai suljettuja joukkoja avaruudessa X ?

6. Olkoon $A \subset X$, ja olkoon $f : X \rightarrow Y$ kuvaus, jonka rajoittuma $f|_A : A \rightarrow Y$ on jatkuva sisäpisteessä $a \in \text{int}(A)$. Osoita että myös f , kuvauksena $f : X \rightarrow Y$, on jatkuva pisteessä a .

Muotoile alkuosan perusteella jatkuvuustulos, joka koskee kuvausta $f : X \rightarrow Y$ ja X :n avoimia osajoukkoja U_i , $i \in I$, joilla $\cup_{i \in I} U_i = X$.

Huom. Ensimmäisen kurssikokeen 20.10. alue on Väisälän luvut 1-8, harjoitukset 1-6. Kokeissahan saa olla mukana yhden A4-arkin kokoinen tiivistelmä. Harjoitus 7 on sitten 2. periodin toisella viikolla 2.-7.11.