Topologia I
Harjoitus 5, syksy 2015

1. (4:4, osapuilleen). Olkoon $E = C([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Jokaista $f \in E$ kohti yhtälö

$$\alpha(f)(x) = 5xf(x) \quad \text{kaikilla } x \in [0,1]$$

määrittelee kuvauksen $\alpha(f) : [0,1] \to \mathbf{R}$.

(a) Osoita että $\alpha(f)$ on jatkuva, ts. $\alpha(f) \in E$.

(b) Kohdan (a) nojalla saadaan kuvaus $\alpha : E \to E$, $f \mapsto \alpha(f)$. Todista että α on Lipschitz ja siten jatkuva.

Ohje (a). Väisälän luku 5.

2 (6:5). Olkoot A ja B suljettuja joukkoja $\mathbf{R}$:ssä. Osoita että tällöin karteesinen tulo $A \times B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in A, y \in B\}$ on suljettu $\mathbf{R}^2$:ssa.

Ohje. Projektiokuvaukset, lauseen 6.13 kohta (2).

3. Tutki ovatko seuraavat euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukot suljettuja:

(a) $A_k = \{z = (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1/(k+1) \leq |z| \leq 1\}$, jossa $k \in \mathbf{N}$,
(b) $A = \cup_{k \in \mathbf{N}} A_k$.

Jos ei, niin määrää sulkeuma.

Ohje (a). Vaikka jatkuvat kuvaukset ja lauseen 6.13 kohta (2).

4 (6:12). Olkoot $f, g : X \to Y$ jatkuvia kuvauksia ja $A \subset X$ sellainen joukko että $f|A = g|A$. Osoita että $f|\bar{A} = g|\bar{A}$.

5 (6:18). Osoita että jokainen suljettu joukko $F \subset X$ voidaan lausua leikkauksena laskevasta jonosta avoimia joukkoja $U_1 \supset U_2 \supset \cdots$.

Ohje. Käytä sopivia r-ympäristöjä, kts. 4.10.

6 (6:8). Olkoon E sisätuloavaruus ja $A \subset E$. Osoita että A:n ortokomplementti $A^{\perp} = \{x \in E \mid \langle x, a \rangle = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}$ on suljettu E:ssä. Siten $A^{\perp}$ on E:n suljettu vektorialiavaruus (harjoituksen 1 teht. 5).

Ohje. Tunnetusti sisätulo on jatkuva kuvaus. Esitä $A^{\perp}$ vaikka leikkauksena.