Topologia I
Harjoitus 2, syksy 2015

1 (Väisälä 1:10, osa). Osoita että yhtälö $\|x\| = \max\{|x_1|+|x_2|, 2|x_1|\}$ määrittelee normin tasossa $\mathbf{R}^2$.

Ohje. Normi on maksimi kahdesta luvusta - tutki ne erikseen vektorille $x+y$.

2 (Väisälä 1:10, osa). Piirrä yksikköpallo $S = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ edellisen tehtävän normille.

Ohje. Maksimin luvut antavat omat yksikköpallonsa; vedä niistä johtopäätös.

3. Olkoon $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Tutki onko kuvaus

$$d(x, y) = |x_1^5 - y_1^5| + |x_2^3 - y_2^3|$$

metriikka joukossa $\mathbf{R}^2$.

4. Määritä havainnollisesti tason $\mathbf{R}^2$ kuula $B(a, 2)$, kun $a = (1, -1)$ ja metriikkana on $d(x, y) = 2|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$, jossa $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$. Ei tarvitse osoittaa että kyseessä on todella metriikka, mutta voihan sen tehdäkin. (Kuinka helpoiten?)

Ohje. Valitse vaikka aluksi $a = (0, 0)$, riisu itseisarvot ja siirrä sitten kuviosi.

5. Olkoon $X = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, ja olkoon joukossa $X \times X$ reaaliarvoinen kuvaus

$$d(x, y) = \Big|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\Big|, \quad x, y \in X.$$

Osoita että d on metriikka joukossa X.

6. (2:13) Olkoon $E = raj([0, 1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla. Määritä sen osajoukkojen $A = \{f_n : [0, 1] \to \mathbf{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{f : [0, 1] \to \mathbf{R} \mid f \ on\ vakiofunktio\}$ välinen etäisyys $d(A, B)$.

Ohje. Erästä tiettyä vakiofunktiota kannattaa pitää silmällä.