Topologia I

Harjoitus 12, syksy 2015

1. Olkoon $S^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Osoita kuvaus $f : S^1 \to \mathbf{R}^3$,

$$f(x,y) = (x, x-2y^2, y-2x^2) \text{ kun } (x,y) \in S^1,$$

upotukseksi. Huom. Siten kuvajoukko fS^1 on Jordanin käyrä $\mathbf{R}^3$:ssa.

Ohje. Osoita f:n injektiivisyys.

2. Tarkastellaan harjoituksen 11 tehtävässä 3 esiintyvää tason $\mathbf{R}^2$ osajoukkoa $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| > |y|\}$. Osoita sen sulkeuma $\bar{E}$ yhtenäiseksi.

Ohje. Origosta alkava jana, ts. polkuyhtenäisyys. Havainnollista kuvalla.

3. Tarkastellaan harjoituksen 11 tehtävässä 4 esiintyvää $\mathbf{R}^2$:n osajoukkoa $A_1 = \{(x,y) \mid x^2/3 + y^2 \leq 4\}$. Osoita se yhtenäisiksi.

Ohje. Sama taktiikka kuin tehtävässä 2.

4 (14:9). Osoita että $\mathbf{R}^3$:n osajoukko $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + \cos y - e^y \sin z = 1\}$ on yhtenäinen.

Ohje. Lause 14.16, kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, jolla $Imf = A$.

5. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $I = [0,1]$. Olkoot $\alpha : I \to X$ ja $\beta : I \to X$ sen polkuja, joilla $\alpha(1) = \beta(0)$, siis ensimmäisen päätepiste on toisen alkupiste. Konstruoi α:n ja β:n avulla X:n polut $\gamma : I \to X$ ja $\eta : I \to X$, joilla $\gamma(I) = \eta(I) = \alpha(I) \cup \beta(I)$ (eivät siis eksy edellisiltä), $\gamma(0) = \alpha(0)$ ja $\gamma(1) = \beta(1)$ sekä $\eta(0) = \beta(1)$ ja $\eta(1) = \alpha(0)$. Voi sanoa että γ kulkee α:n ja β:n peräkkäin ja η taas tekee sen takaperin.

Ohje. Määrittele paloittain.

6 (14:8, muunnelma). Olkoon G metrisen avaruuden (X,d) alue. Olkoot joukot $A, B \subset \partial G$ (=G:n reuna) suljettuja, epätyhjiä ja erillisiä. Osoita että on olemassa sellainen piste $x \in G$ että $d(x,A) = d(x,B)$.

Ohje. Tarkastele jatkuvaa kuvausta $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$, lause 14.19. Erillisyyttä muuten voidaan tässä väljentää: kunhan $A \not\subset B$ ja $B \not\subset A$, mutta ei tämän enempää.

Huom. Toisen kurssikokeen 15.12. (ja tuonnempana sen korvaavan) alue on Väisälän luvut 9-14, kuitenkin pois lukien luvun 11 tuloavaruudet ja kaikki separaatiota ja komponentteja koskeva luvussa 14. Vastaavat harjoitukset ovat 7-12.