Topologia I
Harjoitus 11, syksy 2015

1 (13:4, muunnos). Olkoon avaruus (X, d) kompakti, ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja epätyhjiä osajoukkoja.

(a) Osoita sopivan jonon avulla, että leikkaus $\cap_{n \in \mathbf{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

Huom. Jos lisäksi $d(A_n) \to 0$, niin leikkaus on yksiö (vrt. tehtävä 4 harjoitus 9).

(b) Onko leikkaus välttämättä epätyhjä, jos X:n kompaktiutta ei oleteta?

Ohje. (b) Valitse $X = \mathbf{R}$ ja siinä sopivat sisäkkäiset suljetut välit.

2 (13:19, kahden pisteen tehtävä). Olkoon avaruus (X, d) kompakti ja (f_k) nouseva jono jatkuvia funktioita $f_k : X \to \mathbf{R}$, jotka suppenevat pisteittäin X:ssä kohti jatkuvaa funktiota $g : X \to \mathbf{R}$. Osoita suppeneminen tasaiseksi X:ssä.

Ohje. Olkoon $\epsilon > 0$, merkitään $A_k = \{x \in X \mid f_k(x) \leq g(x) - \epsilon\}$; osoita edellisen tehtävän tulosta käyttäen että $A_k = \emptyset$ jollakin $k \in \mathbf{N}$.

3 (14:12, muunnos). Tarkastellaan tason $\mathbf{R}^2$ joukkoa $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| > |y|\}$.

(a) Onko E yhtenäinen? (b) Onko sulkeuma $\bar{E}$ yhtenäinen? Tätä kohtaa ei tarvitse perustella.

Ohje. Havainnollista kuvalla.

4. Tarkastellaan harjoituksen 10 tehtävässä 1 esiintyviä $\mathbf{R}^2$:n osajoukkoja

$A_1 = \{(x, y) \mid x^2/3 + y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x, y) \mid x^2 y^2 = 1\}$, $A_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

Mitkä niistä ovat yhtenäisiä? Mitkä $\mathbf{R}^2$:n alueita? Ei tarvitse perustella.

5 (14:4). Olkoon $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ ja $X = A \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$. Olkoon $f : X \to \mathbf{R}^2$ jatkuva kuvaus, jolla $f(x, 0) = (0, 0)$ kaikilla $x \in A$. Todista että kuvajoukko fX on yhtenäinen.

Ohje. Avaruutta X ei siis tiedetä yhtenäiseksi, mutta väli $[0, 1]$ tiedetään. Mahdollisuuksia on monia, esimerkiksi lause 14.12.

6. Olkoon $x_0 \in [a, b]$, ja olkoot $f, g : [a, b] \to X$ sellaisia jatkuvia kuvauksia että $f(x_0) = g(x_0)$, ja aina kun $f(x) = g(x)$, pisteellä x on sellainen ympäristö $[a, b]$:ssä että siinä $f(y) = g(y)$. Osoita että tällöin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, ts. $f = g$.

Huom. Ympäristö $[a, b]$:ssä on ympäristö $\mathbf{R}$:ssä leikattuna siihen (kuten aina osajoukoilla).