

Topologia I
Harjoitus 10, syksy 2015

1 (13:3, melkein). Tutki lyhyesti onko joukko $A_k \subset \mathbf{R}^2$ (a) kompakti, (b) täydellinen, kun

$$A_1 = \{(x, y) \mid x^2/3 + y^2 \leq 4\}, A_2 = \{(x, y) \mid x^2 y^2 = 1\}, A_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

2. Olkoon $A \neq \emptyset$ tason \mathbf{R}^2 suljettu ja rajoitettu osajoukko. Osoita että löytyy sellainen piste $(a, b) \in A$ että $\cos^2 x + 2 \sin^2 y \leq \cos^2 a + 2 \sin^2 b$ kaikilla $(x, y) \in A$. Ohje. Käytä jatkuvaa kuvausta.

3 (13:21). Olkoon kuvaus $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva, ja olkoon se tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbf{R}^n \setminus B^n$ (B^n avoin yksikkökuula). Osoita että f on tasaisesti jatkuva koko \mathbf{R}^n :ssä. Huom. Tehtävässä annettu tulos pätee vaikka maalina olisi \mathbf{R} :n sijasta mikä tahansa metrinen avaruus.

Ohje. Niin iso kuula $A = \bar{B}(\mathbf{0}, r)$ ja niin pieni $\delta > 0$, että $x, y \in A$ tai $x, y \in \mathbf{R}^n \setminus B^n$ aina kun $|x - y| < \delta$; lause 13.36. Piirrä itsellesi havainnekuva.

4. Osoita (tunnetusti) jatkuva funktio $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^{1/5}$, tasaisesti jatkuvaksi \mathbf{R} :ssä.

Ohje. Edellisen tehtävän tulos ja väliarvolause.

5 (13:6 a). Olkoot A ja B avaruuden \mathbf{R}^n epätyhjiä erillisiä joukkoja, A kompakti ja B suljettu. Osoita että löytyy sellaiset pisteet $a \in A$ ja $b \in B$ että

$$\|a - b\| = d(A, B).$$

Ohje. Leikkaa B kompaktiksi isolla suljetulla kuulalla.

6. (a) Olkoon $r > 0$, ja olkoon A metrisen avaruuden (X, d) osajoukko, josta löytyy sellainen jono (x_k) että $d(x_k, x_m) \geq r$ kaikilla $k \neq m$. Osoita että tällöin A ei ole kompakti.

(b) Varustetaan jatkuvien kuvausten avaruus $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ supnormilla $\|*\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ kun $f \in E$. Osoita kohtaa (a) hyväksi käyttäen että E :n suljettu yksikkökuula

$$\bar{B} = \bar{B}(\mathbf{0}, 1) = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

ei ole kompakti, vaikka se tunnetusti on suljettu ja rajoitettu joukko E :ssä.

Ohje. (b) Jono paloittain määriteltyjä (yksinkertaisia) funktiota $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, jotka ovat hengissä väleillä $]1/(k+1), 1/k[$, eli mitkään kaksi ei yhtä aikaa.