Topologia I

Harjoitus 4, syksy 2015

1 (3:8). Onko $\mathbf{R}$:n osajoukoilla A ja B erillisiä ympäristöjä, kun $A = [0,1]$ ja
(a) $B = [2,3]$, (b) $B =]1,3]$?

2. Olkoon X metrinen avaruus, kuvaus $f : X \to \mathbf{R}$ olkoon jatkuva pisteessä $a \in X$ ja $f(a) > 0$. Osoita että a:lla on ympäristö $U \subset X$, jossa kaikilla x pätee $f(x) > f(a)/2$.

3 (4:8, osa). Olkoon

$$f(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{ja} \quad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{kun } (x,y) \neq \mathbf{0}.$$

Osoita että näin määritelty funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on epäjatkuva origossa.

Ohje. Origon kautta kulkee tilanteeseen sopiva geometrinen käyrä.

4. (a) Olkoon $f : [-2,2] \to \mathbf{R}$ funktio $f(x) = x^2/2 - \sin x$. Määritä väliarvolauseella perustellen jokin sellainen $M \geq 0$, että f on M-Lipschitz.

(b) Olkoon $(E, |*|)$ normiavaruus, ja olkoot x ja y kaksi kiinnitettyä E:n pistettä. Yhtälö

$$h(t) = (1-t)x + ty, \quad \text{kun } t \in [0,1],$$

määrittelee kuvauksen $h : [0,1] \to E$, joka piirtää pisteitä x ja y yhdistävän janan E:ssä. Osoita että h on jatkuva.

5. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukkoa

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - x < y^3 < -2x^2\}.$$

Osoita että A on avoin joukko.

Ohje. Muista jatkuvat kuvaukset (useamman muuttujan polynomit ovat jatkuvia, luku 5).

6. Olkoot $f, g : X \to \mathbf{R}$ jatkuvia funktioita. Osoita että tällöin myös

(a) maksimifunktio $h : X \to \mathbf{R}$, jossa $x \mapsto h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, on jatkuva,

(b) itseisarvofunktio $|f| : X \to \mathbf{R}$, jossa $x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$, on jatkuva.

Ohjeita. (a) Kiinitä $a \in X$, jolloin voit olettaa $h(a) = f(a)$; jaottele tapausten $g(a) < f(a)$ ja $g(a) = f(a)$ mukaan, ja saat a:n tarvittavan ympäristön kahden ympäristön leikkauksena. (b) Käytä kohtaa (a).