

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Määrittele milloin kuvaus $f : X \rightarrow Y$ on bilipschitz (joukossa X).

2. Tarkastellaan euklidisen tason \mathbf{R}^2 osajoukkoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^4 + x^2 y^2 = 1\}.$$

Onko se (a) täydellinen, (b) yhtenäinen? Perustelut.

3. Tarkastellaan avaruuksien \mathbf{R}^2 ja \mathbf{R}^3 :n osajoukkoja

$$X = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \in [0, 1]\} \quad \text{ja}$$

$$Y = \{(x^2 - y^2, x^3 - x, 3y) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \in X\}$$

tavallisella euklidisella metriikalla varustettuina (lue tarkkaan Y :n määritelmä). Anna jokin homeomorfismi $f : X \approx Y$, ja perustele se todella homeomorfismiksi. Kun nyt tuommoinen homeomorfismi on, onko Y kompakti tai polkuyhtenäinen?

4. Olkoon funktio $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva, ja määritellään jokaista $k \in \mathbf{N}$ kohti funktio

$$f_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}, \quad f_k(x) = \int_{x-1/k}^{x+1/k} \frac{k}{2} f(t) dt, \quad \text{kun } x \in [-1, 1];$$

niitä voisi kutsua f :n paikallisiksi keskiarvoistuksiksi (huomaa f_k :n määrittelyväli). Osoita funktiojonon (f_k) suppenevan tasaisesti joukossa $[-1, 1]$ kohti funktiota f , tarkemmin kohti tämän rajoittumaa (kun $k \rightarrow \infty$).

Ohje. Tasainen jatkuvuus; huomaa että $\int_{x-1/k}^{x+1/k} k/2 dt = 1$.