Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe 20.10.2015

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Osoita että yhtälö

$$d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|, \quad \text{kun } x,y \in \mathbf{R},$$

määrittelee metriikan joukossa $\mathbf{R}$.

2. Määrää perustellen $\mathbf{R}^2$:n osajoukon $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y < 1\}$ reuna ∂A ja sulkeuma $\bar{A}$ avaruudessa $\mathbf{R}^2$ (jossa tavallinen metriikka). Kannattanee piirtää kuva.

3. Tarkastellaan kuvausta

$$f = (f_1, f_2) : [0,1] \to \mathbf{R}^2, \quad f(x) = \big(2x + x^2,\, 1 - 3x\big), \text{ kun } x \in [0,1].$$

Joukoissa $[0,1]$ ja $\mathbf{R}^2$ tavalliset euklidiset metriikkansa.

(a) Osoita että f:n komponentti $f_1 : [0,1] \to \mathbf{R}$ on 4-Lipschitz ja komponentti $f_2 : [0,1] \to \mathbf{R}$ on 3-Lipschitz (joukossa $[0,1]$).

(b) Onko itse f Lipschitz (joukossa $[0,1]$)? Perustelu; luonnollisesti kohtaa (a) saa käyttää hyväksi.

4. Määritellään funktio $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ yhtälöllä

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kun } x \geq 0, \\ \sin x, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

Pidetään tunnettuna että se on jatkuva pisteissä $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, siis rajoittuma $\alpha| : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ on jatkuva. Tarkastellaan kuvausta

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad f(x,y) = x\alpha(y) + x^2 y \quad \text{kaikilla } (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Sekä $\mathbf{R}$:ssä että $\mathbf{R}^2$:ssa tavalliset euklidiset metriikat.

Anna tason $\mathbf{R}^2$ pisteet, joissa f mielestäsi on jatkuva, ja osoita (lyhyesti) jatkuvuus näissä pisteissä. Epäjatkuvuutta puolestaan, missä kohdataankin, ei tarvitse perustella - vastaukseksi ei muuten kelpaa sanoa ettei jatkuvuuspisteitä olisi.