Algebran peruslause (kurssin Topo I ([illegible]))

Perusasiat kompleksiluvuista ja kompleksitasosta $\mathbb{C}$:

Kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ standardiesitys on

$$z = x + yi, \quad \text{jossa } x, y \in \mathbb{R} \text{ ja } i^2 = -1.$$

Olkoon $z = x + yi$, $w = u + vi \in \mathbb{C}$. Laskutoimitukset

$$z \pm w = (x \pm u) + (y \pm v)i \in \mathbb{C},$$

$$zw = (x+yi)(u+vi) = xu + xvi + yui + yv\underbrace{i^2}_{=-1} =$$
$$(xu - yv) + (xv + yu)i \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

z:n kompleksikonjugaatti eli liittoluku $\bar{z} = x - yi \in \mathbb{C}$.

Kun $z \neq 0$ ($x \neq 0$ tai $y \neq 0$), niin

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i \in \mathbb{C},$$

siis käänteisluku on olemassa.

Erityisesti, kun $z \neq 0$, sillä voidaan jakaa ja

$$\frac{w}{z} = \frac{1}{z} w = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i\right)(u+vi) = \frac{xu+yv}{x^2+y^2} + \frac{xv-yu}{x^2+y^2} i \in \mathbb{C}.$$

Normi eli itseisarvo on

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}, \quad z = x + yi;$$

se on $\mathbb{C}$:n pistetulon $z \cdot w = z\bar{w} \in \mathbb{C}$ luoma ja siten todella normi. Sille pätee tulo- ja osamääräsäännöt

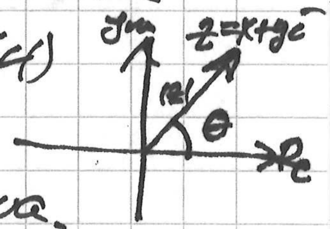
$$|zw| = |z||w| \quad \text{ja} \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \qquad (2)$$

mitkä voidaan osoittaa suoraan standardiesityksestä tai trigonometrisesta äärettömyydestä vuorostaan kaava.

Kuvaus $z = x+yi \leftrightarrow (x,y) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ on lineaarinen isomorfismi (kun $\mathbb{C}$ reaalivektoriavaruutena) ja säilyttää normin, on siis isometria. Siis topologian kannalta kompleksitaso $\mathbb{C}$ ja euklidinen reaalitaso $\mathbb{R}^2$ voidaan samastaa. Erityisesti, polynomin $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, määrittelemä kuvaus $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on jatkuva, mikä nähdään kuten lukiossa tai toteamalla se reaalikuvaukseksi $(q, r) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jossa $p(z) = q(x,y) + r(x,y)i$, (3) $z = x+yi$, ja q sekä r ovat reaalipolynomeja.

Kompleksiluvut $z = x+yi$ voidaan esittää geometrisessa (trigonometrisessa) muodossa

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \qquad (4)$$



jossa viimeinen muoto on ns. Moivren kaava. On helppo laskea, vaikka käyttäen kosinin ja sinin yhteenlaskukaavoja, että

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|^n e^{in\theta} \qquad (5)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä merkitsee että binomiyhtälöllä

$$z^n = w, \quad w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C} \qquad (6)$$

on kompleksitasossa tason n juurta (paitsi kun $w=0$, vain $z=0$), nimittäin (7)

$$z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Huom. Tässä on yksi ratkaisevista eroista reaalilukujen $\mathbb{R}$ nähden: esimerkiksi binomiyhtälöllä $x^2 = -1$ ei ole ratkaisua $\mathbb{R}$:ssä.

Algebran peruslause. Olkoon $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, \dots, n$, polynomi, joka ei kuitenkaan vakio, ts. $n \geq 1$ ja $a_n \neq 0$. Tällöin sillä on juuri z_0 kompleksilukujoukossa, ts. $p(z_0) = 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Tod (Cauchy). Tarkastellaan kuvausta

$$|p| = |\cdot| \circ p : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+, \quad z \mapsto |p(z)|. \qquad (8)$$

Se on jatkuvien kuvausten yhdistelmänä jatkuva. Itseisarvosääntöjen (2) avulla voidaan kirjoittaa

$$|p(z)| = \left|a_n\left(z^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}\right)\right| = \left|a_n z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} z^{-n}\right)\right| = |a_n|\,|z|^n \left|1 + o\left(\tfrac{1}{z}\right)\right|,$$

kun $z \neq 0$. Tässä $o(w) \to 0$, kun $w \to 0$, eli

$$o\left(\tfrac{1}{z}\right) \to 0 \quad \text{kun} \quad z \to \infty. \qquad (9)$$

Löytyy sellainen $r > 0$, että

$$|a_n|\,|z|^n > 2|p(0)| \quad \text{ja} \quad \left|1 + o\left(\tfrac{1}{z}\right)\right| \geq \left|1 - \left|o\left(\tfrac{1}{z}\right)\right|\right| \geq \tfrac{1}{2}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, joilla $|z| > r$. Näillä z pätee $|p(z)| > |p(0)|$.

Toisaalta suljettu kiekko

$$\overline{B}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x,y)| \leq r\}$$

on tunnetusti kompakti. Jatkuva reaaliarvoinen funktio $|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ saavuttaa siinä minimiinsä, saavuttaa pisteessä z_0. Koska $|p(z)| > |p(0)| \geq |p(z_0)|$, kun $|z| > r$, piste z_0 on funktion $|p|$ globaali minimikohta:

$$|p(z)| \geq |p(z_0)| \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}. \qquad (10)$$

Käyttäen jakoyhtälöä $p(z)$ voidaan "kehittää z_0:n ympärillä", kirjoittaa muodossa:

$$p(z) = b_0 + b_1(z-z_0) + \dots + b_n(z-z_0)^n, \quad b_k \in \mathbb{C},\ k=0,\dots,n. \qquad (11)$$

Erityisesti $p(z_0) = b_0$. Osoitetaan että $b_0 = 0$, jolloin $p(z_0) = 0$ eli $z_0 \in \mathbb{C}$ on p:n juuri.

VO: $b_0 \neq 0$. Voidaan olettaa että $b_0 = 1$, sillä jakamalla b_0:lla $(\neq 0)$ päästään tällaiseen polynomiin $p(z)/b_0$. Olkoon k pienin indeksi $i = 1, \dots, n$, jolla $b_i \neq 0$. Tällainen on sillä $b_n \neq 0$. Merkitään $z - z_0 = w$, jolloin voidaan kirjoittaa

$$p(w+z_0) = \underset{b_0}{1} + b_k w^k (1 + o(w)), \qquad (12)$$

jossa $o(w) \to 0$ kun $w \to 0$.

Lauseen (6), (7) nojalla binomiyhtälöllä

$$b_k w^k = -1 \iff w^k = -b_k^{-1}$$

on ratkaisu $w_0 \in \mathbb{C}$. Kaavan (12) nojalla pätee

$$p(tw_0 + z_0) = 1 - t^k(1 + o(tw_0)), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (13)$$

jossa $o(tw_0) \in \mathbb{C}$ ja $o(tw_0) \to 0$, kun $t \to 0$. Erityisesti kun $0 < t < 1$, niin

$$|p(tw_0+z_0)| \leq |1 - t^k| + t^k|o(tw_0)| = 1 - t^k + t^k|o(tw_0)|$$
$$= 1 - t^k(1 - |o(tw_0)|), \qquad (14)$$

jolla on $< 1 = b_0$, kun $t > 0$ on tarpeeksi pieni. Siis tällaisella t pätee

$$|p(ta_0 + z_0)| < b_0 = |p(z_0)|$$

vastoin kohtaa (10). Ristiriita osoittaa, että $p(z_0) = 0$. $\square$

Huom. Edellä esitetyn nojalla ratkaiseva ero polynomiyhtälöiden juurissa $\mathbb{R}$:ssä ja $\mathbb{C}$:ssä tiivistyy siihen, että $\mathbb{C}$:ssä binomiyhtälöllä on aina juuri, mutta $\mathbb{R}$:ssä ei tarvitse olla.