n-ulotteinen normiavaruus

Olkoon $(E, \|*\|)$ reaalikertoiminen normiavaruus, jonka dimensio on n: sillä on n-jäseninen kanta $(c_1, \dots, c_n)$, $c_k \in E$, jonka avulla jokainen vektori $x \in E$ voidaan esittää yksikäsitteisesti määrättyjen kertoimien $x_k \in \mathbb{R}$ lineaarikombinaationa

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k c_k = x_1 c_1 + \dots + x_n c_n. \qquad (1)$$

Näin kantoja on rajaton määrä, kaikki kuitenkin pituudeltaan n.

Väite. Normiavaruus $(E, \|*\|)$, jonka ulottuvuus on n, on homeomorfinen euklidisen avaruuden $(\mathbb{R}^n, |*|)$ kanssa.

Tod. Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to E$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k c_k \quad \text{kun } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

Se on lineaarikuvaus: kun $x, y \in \mathbb{R}^n$, ja $a, b \in \mathbb{R}$, niin

$$f(ax+by) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + by_k) c_k = a \sum_{k=1}^{n} x_k c_k + b \sum_{k=1}^{n} y_k c_k = a f(x) + b f(y).$$

Selvästi se on injektio: $f(x) = f(y) \iff f(x-y) = \bar{0}$

$$\iff \sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k) c_k = \bar{0} \iff x_k = y_k,\ k = 1, \dots, n \iff x = y.$$

Yhtä selvästi se on surjektio. Siis $f : \mathbb{R}^n \to E$ on lineaarinen isomorfismi.

Kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\|f(x)\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} x_k c_k \Big\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|c_k\| \le C \sum_{k=1}^{n} |x_k| = C |x|_1 \le C\sqrt{n} |x|,$$

jossa $C = \max\{\|c_k\| : k = 1, \dots, n\}$.

Siis f on Lipschitz $\mathbb{R}^n$:ssä ja siten jatkuva.

Määritellään $g = \|*\| \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jossa siis

$g(x)=\|f(x)\|$ kun $x\in\mathbb{R}^n$. (3)

Koska normifunktio $\|*\|: E\to\mathbb{R}$ on jatkuva, on g jatkuvien kuvausten yhdistelmänä jatkuva.

Tarkastellaan yksikköpalloa $S^{n-1}\subset\mathbb{R}^n$ ja sen kuvaa gS^{n-1}. Kun $x\in S^{n-1}$, niin $x\neq\bar{0}$, $f(x)\neq\bar{0}$ ($f(\bar{0})=\bar{0}$ ja injektiivisyys) ja siten $g(x)=\|f(x)\|>0$.

Tunnetusti S^{n-1} on kompakti, ja siten jatkuva reaalikuvaus g saa siinä suurimman ja pienimmän arvonsa M ja m; ne ovat positiivia. Siten $0<m\le M$ ja

$$m\le g(x)\le M \text{ kaikille } x\in S^{n-1}. \quad (4)$$

Lopuksi, olkoon $x\in\mathbb{R}^n\setminus\{\bar{0}\}$. Tällöin $\frac{x}{|x|}\in S^{n-1}$ ja (4):n mukaan, ja koska f on lineaarikuvaus,

$$m\le g\left(\frac{x}{|x|}\right)=\left\|f\left(\frac{x}{|x|}\right)\right\|=\left\|\frac{1}{|x|}f(x)\right\|=\frac{1}{|x|}\|f(x)\|\le M,$$

josta $m|x|\le\|f(x)\|\le M|x|$ kaikille $x\in\mathbb{R}^n$. (5)
($f(\bar{0})=\bar{0}$), siis f on peräti bilipschitz $\mathbb{R}^n$:ssä ja erityisesti homeomorfismi. □

<u>Seuraus.</u> Avaruuden $\mathbb{R}^n$ jokainen normi $\|*\|$ on bilipschitz-ekvivalentti euklidisen normin kanssa, siten kaikki $\mathbb{R}^n$:n normit ovat bilipschitz-ekvivalentteja keskenään.

<u>Tod.</u> Valitaan $E=(\mathbb{R}^n,\|*\|)$ ja $\mathbb{R}^n$:n standardikanta $(e_1,\dots,e_n)$, jossa esimerkiksi $e_1=(1,0,\dots,0)$. Tällöin lauseen kuvaus f on identtinen: $f=id$. Siten (5):n mukaan

$$m|x|\le\|x\|\le M|x| \text{ kaikille } x\in\mathbb{R}^n.$$