1

Väisälän luku 11, funktioiden raja-arvot

Tehtävänasettelu: Olkoon $A \subset H \subset X$, $f: H \to Y$ olkoon kuvaus ja $a \in \bar{A}$ $(= cl_X A)$. Määritellään funktion f raja-arvo pisteessä a pitkin joukkoa A. Joukolla A voidaan "säädellä" raja-arvoa.

Taustaa: Funktion $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivaatta pisteessä $x_0 \in]a,b[$ määritellään raja-arvona erotusosamäärästä (mikäli tämä raja-arvo on olemassa),

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Merkitään $F(x_0; x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \in]a,b[\setminus \{x_0\}$.

Tässä raja-arvossa $X =]a,b[$, mutta erotusosamäärä $F(x_0; *) : H \to \mathbb{R}$ on määritelty joukossa $H =]a,b[\setminus \{x_0\}$. Lisäksi $A = H$. Huomaa että $x_0 \notin H$, mutta $x_0 \in \bar{A} = \bar{H}$.

Tullaan merkitsemään

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0,\, x \in A} F(x_0; x)$$

Oikeanpuoleisessa derivaatassa

$$f'(x_0+) = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \downarrow x_0} F(x_0; x)$$

käytetään vain muuttujan arvoja $x \in]x_0, b[$, ts. raja-arvo otetaan pitkin joukkoa $A =]x_0, b[$, ja voidaan merkitä

$$f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0,\, x \in A} F(x_0; x), \quad \text{missä } A =]x_0, b[.$$

Määritelmä: Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Olkoon $A \subset H \subset X$, $a \in \bar{A}$ $(= cl_X A)$, ja $f: H \to Y$ olkoon kuvaus. Kuvauksella f on pisteessä a raja-arvo $b \in Y$ pitkin joukkoa A, jos jokaista $b \in V \subset Y$ kohti löytyy sellainen $a \in U \subset X$ että

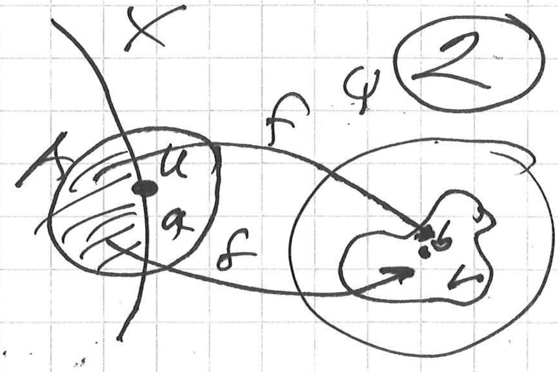
$$f(A \cap U) \subset V.$$

Huom. Aina $A \cap U \neq \emptyset$, koska $a \in \bar{A}$.

Tällöin merkitään

$f(x) \to b$, kun $x \to a$, $x \in A$, tai

$$b = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x).$$



Huom. (1) Kuvauksen f ei tarvitse olla määritelty pisteessä a, mutta oletetaan kuitenkin silti että $a \in \bar{A}$ (derivaattamerkinnöissä). Jos $A = H$ ja H on selvä, voidaan merkitä lyhyesti

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

Huom. Analyysissä kuitenkin tämä merkintä tarkoittaa että $A = H \setminus \{a\}$ (derivaattamerkinnöissä). Koska joukon $H \setminus A$ pisteet eivät vaikuta raja-arvoon pisteessä joukossa A, joukkoa H ei useinkaan mainita.

(2) Oletus $a \in \bar{A}$ on tärkeä: Jos $a \notin \bar{A}$, löytyy sellainen $a \in U \overset{\circ}{\subset} X$ että $A \cap U = \emptyset$. Olkoot $b_1, b_2 \in V$, $b_1 \neq b_2$ ja V_1 ja V_2 niiden erilliset ympäristöt. Tällöin $f(U \cap A) = f\emptyset = \emptyset \subset V_1$, ts. jokainen $b_1 \in V$ kelpaisi raja-arvoksi, mikä tietenkään ei sisällä mitään informaatiota.

Toisaalta, kun kerran $a \in \bar{A}$, niin jos $f(x) \to b_1$ ja $f(x) \to b_2$, kun $x \to a$, $x \in A$, niin löytyy $a \in U_1 \overset{\circ}{\subset} X$ ja $a \in U_2 \overset{\circ}{\subset} X$, joille $f(A \cap U_1) \subset V_1$ ja $f(A \cap U_2) \subset V_2$. Koska $a \in U_1 \cap U_2 \overset{\circ}{\subset} X$ ja $a \in \bar{A}$, niin $A \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, mutta $f(A \cap U_1 \cap U_2) \subset V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ↯. Siten raja-arvoja voi olla korkeintaan yksi eli raja-arvo on yksikäsitteisesti määrätty.

(3) Jos joukkoa A pienennetään, raja-arvo säilyy. Toisin sanoen, olkoon $B\subset A$ ja $a\in\overline{B}$. Jos $f(x)\to b$, kun $x\to a$, $x\in A$, niin selvästikin $f(x)\to b$, kun $x\to a$, $x\in B$. Ei luonnollisestikaan käänteisesti.

(4) Piste a voi kuulua joukkoon A tai voi olla kuulumatta (kunhan $a\in\overline{A}$). Jos $a\in A$ ja $f(x)\to b$, kun $x\to a$, $x\in A$, niin määritelmässä esiintyvät U, ja V pätee $a\in A\cap U \Rightarrow f(a)\in V$ kaikilla $b\in V\subset Y$. Siten $f(a)=b$. Siis, kun $a\in A$, niin

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = f(a) \quad \text{(mikäli raja-arvo on)}$$

Lause A. Olkoon $A\subset H\subset X$, ja olkoon kuvaus $f: H\to Y$ jatkuva pisteessä $a\in\overline{A}\cap H$. Tällöin raja-arvo on olemassa ja

$$\lim_{x\to a,\, x\in A} f(x) = f(a).$$

Tod. Seuraa suoraan jatkuvuuden ja raja-arvon määritelmistä. $\square$

Lause B (käänteinen tulos). Olkoon $f: X\to Y$. Kuvaus f on jatkuva pisteessä $a\in X$, jos toinen seuraavista ehdoista toteutuu:

(a) On olemassa $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a,\, x\in X} f(x)$.

(b) On olemassa $b=\lim\limits_{x\to a,\, x\in A} f(x)$, jossa $A = X\setminus\{a\}$, ja $f(a)=b$.

Tod. Seuraa suoraan määritelmistä. $\square$

Kuvauksen jatke. Olkoon $A\subset B\subset X$. Kuvaus $g: B\to Y$ on kuvauksen $f: A\to Y$ jatke joukkoon B, jos $g|A = f$. Mahdollisen jatkuva jatke on topologian avainkysymyksiä.

__Lause C.__ Olkoon $A \subset B \subset X$ ja $B \subset \bar{A}$ $(= cl_X A)$. Tällöin jatkuvalla kuvauksella $f: A \to Y$ on korkeintaan yksi jatkuva jatke $g: B \to Y$.

__Tod.__ Olkoon $a \in B$. Koska $a \in \bar{A}$, lauseen A nojalla

$$g(a) = \lim_{x \to a, x \in A} g(x) = \lim_{x \to a, x \in A} f(x),$$ joka riippuu vain f:stä. □

__Huom.__ Samalla saatiin sääntö, kuinka $g: B \to Y$ pitää määritellä.

__Lause 11.33.__ Olkoon $A \subset B \subset X$, $f: A \to Y$ olkoon jatkuva kuvaus ja $B \subset \bar{A}$ $(= cl_X A)$. Oletetaan että raja-arvo $h(a) = \lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ on olemassa kaikilla $a \in B \setminus A$. Määritellään kuvaus $g: B \to Y$ asettamalla

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } x \in A, \\ h(x), & \text{kun } x \in B \setminus A \end{cases} \overset{\text{lause A}}{=} \lim_{y \to x, y \in A} f(y).$$

Tällöin g on f:n jatkuva jatke joukkoon B.

__Tod.__ Olkoon $a \in B$. Osoitetaan g jatkuvaksi pisteessä a. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän nojalla löytyy sellainen $a \in U \subset X$ että $f(A \cap U) \subset B(g(a), \varepsilon)$. Riittää osoittaa että

$$g(B \cap U) \subset \bar{B}(g(a), \varepsilon).$$

Olkoon $b \in B \cap U$. Tällöin $b \in \bar{A}$ ja $b \in U$, joten $b \in \overline{A \cap U}$ $(= cl_X(A \cap U))$. Koska raja-arvo kuuluu aina sen joukon kuvan sulkeumaan, jota pitkin raja-arvo otetaan (lause 11.31; helppo todistaa), niin

$$g(b) = \lim_{x \to b, x \in A} f(x) = \lim_{x \to b, x \in A \cap U} f(x) \in cl_Y f(A \cap U) \subset cl_Y B(g(a), \varepsilon)$$

$\subset \bar{B}(g(a), \varepsilon)$. Siten $g(B \cap U) \subset \bar{B}(g(a), \varepsilon)$, siis g on jatkuva pisteessä a. □