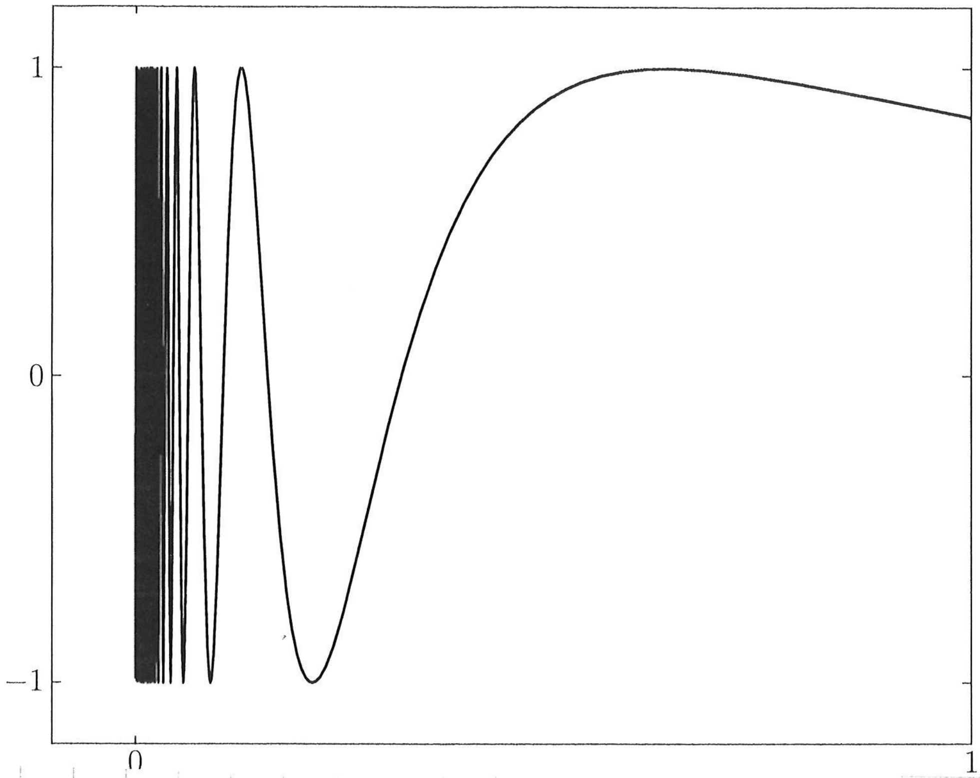
Topologinen sinikäyrä

$\mathbb{R}^2$:n osajoukkoa

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y=\sin(\tfrac{1}{x})\}$$

kutsutaan topologiseksi sinikäyräksi; kuva:



Määrätään sen sulkeuma $\mathbb{R}^2$:ssa. Merkitään

$J=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |y|\le 1\}$, $B = A\cup J$, ja

tuonnempaa tarvetta ajatellen $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}$.

<u>Väite</u>. $\bar{A} = B$.

<u>Tod</u>. Osoitetaan ensin että $J\subset \bar{A}$. Olkoon $z=(0,y)\in J$, ts. $|y|\le 1$. Tällöin tunnetusti löytyy sellainen $t\in[0,2\pi]$ että $y=\sin t$ ($\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jatkuva, $\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, Bolzanon lause). Jaksollisuuden nojalla

$$y=\sin(t+k2\pi) \text{ kaikilla } k\in\mathbb{N}.$$

Olkoon $r>0$. Tarpeeksi suurella k:n arvolla pätee

$0 < x = \frac{1}{t+k2\pi} < r$, niin $(x,y) \in B(z,r)$. Koska lisäksi

$\sin\frac{1}{x} = \sin(t+k2\pi) = y$, niin tällöin $(x,y) \in A$. Siis $B(z,r) \cap A \neq \emptyset$,

joten $z = (0,y) \in \bar{A}$ eli $J \subset \bar{A}$. Siten $B \subset \bar{A}$. (1)

Osoitetaan seuraavaksi, että B on suljettu. Sen komplementti on $\mathbb{R}^2 \setminus B = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, jossa

$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0 \text{ ja } y \neq \sin\frac{1}{x}\}$, $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y|>1\}$

ja $U_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x<0\}$; osoitetaan nämä avoimiksi.

Tapaus U_1: Projektiot $(x,y) \mapsto x$ ja $(x,y) \mapsto y$ ovat jatkuvia myös kuvauksina $X \to \mathbb{R}$ (lienee selvää, mutta 1-Lipschitz tai lause 7.11). Koska $x \neq 0$ kun $(x,y) \in X$, kuvaus $X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \frac{1}{x}$, on lauseen 4.13 nojalla jatkuva. Koska $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on tunnetusti jatkuva, lauseen 4.12 nojalla kuvaus $X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin\frac{1}{x}$, on jatkuva. Lauseiden 5.2 ja 5.3 nojalla kuvaus $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y - \sin\frac{1}{x}$, on jatkuva. Tunnetusti $]0,\infty[$ ja $]-\infty,0[\subset \mathbb{R}$. Lauseen 4.8 nojalla

alkukuvat $f^{-1}]0,\infty[$ ja $f^{-1}]-\infty,0[$ ovat avoimia X:ssä, siten niiden yhdiste U_1 on avoin X:ssä. Mutta koska $X \subset \mathbb{R}^2$, U_1 on avoin myös $\mathbb{R}^2$:ssa (lienee selvää, mutta myös lauseen 7.4 nojalla).

Joukot U_2 ja U_3 ovat selvästi avoimia $\mathbb{R}^2$:ssa (voi perustella myös projektioilla ja lauseella 4.8).

Koska $\mathbb{R}^2 \setminus B = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ on avoimien yhdisteenä avoin, joukko B on suljettu $\mathbb{R}^2$:ssa.

Koska $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$, sulkeuman minimaalisuuden nojalla (lause 6.8 (3) tai (4)) $\bar{A} \subset B$ (2).

Inkluusioista (1) ja (2) seuraa

$$\bar{A} = B.$$

$\square$