Metriikkojen ekvivalenssi

Lause. Olkoon d metriikka joukossa X, ja olkoon $f: X \to X$ bijektio. Asetetaan
$$e(x,y) = d(f(x), f(y)), \text{ kun } x,y \in X.$$
Tällöin e on metriikka joukossa X.

Tod. Selvästi $e(x,y) \geq 0$, $x,y \in X$. Olkoon $x,y,z \in X$.

(M1) $e(x,z) = d(f(x),f(z)) \leq d(f(x),f(y)) + d(f(y),f(z)) = e(x,y) + e(y,z)$.

(M2) $e(x,y) = d(f(x),f(y)) = d(f(y),f(x)) = e(y,x)$.

(M3) $e(x,y) = d(f(x),f(y)) = 0 \iff f(x) = f(y) \iff x = y$ (koska f on injektio) $\square$

Huom. Riittää että $f: X \to X$ on injektio.

Voi päteä $(X,d) \cong (X,e)$, vaikka $d \not\sim e$.

Esimerkki. Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja d euklidinen metriikka. Tarkastellaan bijektiota $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$
ja sen edellisen lauseen nojalla määräämää metriikkaa $e(x,y) = d(f(x),f(y)) = |f(x) - f(y)|$, $x,y \in \mathbb{R}$.
Tällöin kuvaus $f: (\mathbb{R},e) \to (\mathbb{R},d)$ on surjektiivinen isometria, koska $d(f(x),f(y)) = e(x,y)$, $x,y \in \mathbb{R}$. Siis $f: (\mathbb{R},e) \cong (\mathbb{R},d)$.

Kuitenkaan $id: (X,d) \to (X,e)$, samoin kuin $id^{-1}: (X,e) \to (X,d)$, ei ole jatkuva pisteessä 0:
Olkoon $\varepsilon > 0$. $0 \neq x = id(x) \in B_e(id(0),\varepsilon) = B_e(0,\varepsilon) \iff$
$e(x,0) = d(f(x),f(0)) = |\frac{1}{x} - 0| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon \iff |x| > 1/\varepsilon$. Siis kun $x \neq 0$ ja $|x| \leq 1/\varepsilon$, niin $id(x) \notin B_e(id(0),\varepsilon)$. Jokaisella $\delta > 0$ tällaisia pisteitä on kuitenkin kuulassa $B_d(0,\delta)$, joten
$id(B_d(0,\delta)) = B_d(0,\delta) \not\subset B_e(id(0),\varepsilon)$ kaikilla $\delta > 0$.
Siis $id: (X,d) \to (X,e)$ ei ole homeomorfismi eli $d \not\sim e$. $\square$