Esimerkki

Olkoon $D \neq \emptyset$ joukko ja (X,d) metrinen avaruus. Olkoon $Z = \text{raj}(D,X)$ rajoitettujen kuvausten $f: D \to X$ joukko.

Huom. Z on vektoriavaruus ainoastaan kun X on vektoriavaruus, ei siis aina.

Väite. Kuvaus $e: Z \times Z \to \mathbb{R}_+$,

$$e(f,g) = \sup_{x \in D} d(f(x), g(x)) \text{ kaikilla } f,g \in Z$$

on metriikka joukossa Z, ns. supmetriikka.

Tod. Ensinnäkin, koska joukot $A = fD$ ja $B = gD$ ovat d-rajoitettuja X:ssä, myös joukko $A \cup B$ on lauseen 2.? nojalla rajoitettu. Siten, koska $f(x), g(x) \in A \cup B$,

$$0 \leq d(f(x), g(x)) \leq d(A \cup B) < \infty \text{ kaikilla } x \in D,$$

ja $e(f,g) = \sup_{x \in D} d(f(x), g(x)) \in \mathbb{R}_+$, siis kuvaus e on hyvin määritelty.

Olkoon $f, g, h \in (Z, e)$.

(M1) $e(f,g) = \sup_{x \in D} d(f(x), g(x)) \leq \sup_{x \in D} \big(d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) \big) \leq \sup_{x \in D} d(f(x), h(x)) + \sup_{x \in D} d(h(x), g(x))$
$= e(f,h) + e(h,g)$.

(M2) selvä.

(M3) $e(f,g) = \sup_{x \in D} d(f(x), g(x)) = 0 \Leftrightarrow d(f(x), g(x)) = 0$ kaikilla $x \in D \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in D \Leftrightarrow f = g$. $\square$