Lause. Olkoot $(E, \langle *,* \rangle_1)$ ja $(F, \langle *,* \rangle_2)$ sisätuloavaruuksia. Olkoon $f: E \to F$ sellainen isometria että $f(\bar{0}) = \bar{0}$. Tällöin f on lineaarikuvaus.

Lemma 1. $2\langle x,y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2$.

Tod. $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x,x \rangle - 2\langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle =$
$\|x\|^2 - 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2$. □

Lemma 2. Lauseen kuvaukselle f pätee
$\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \langle x,y \rangle_1$ kaikilla $x,y \in E$. Erityisesti $\|f(x)\| = \|x\|$.

Tod. Lemman 1 nojalla

$$2\langle f(x), f(y) \rangle_2 = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2 = \|f(x)-\bar{0}\|^2 + \|f(y)-\bar{0}\|^2$$
$$- \|f(x)-f(y)\|^2 = \|f(x)-f(\bar{0})\|^2 + \|f(y)-f(\bar{0})\|^2 - \|f(x)-f(y)\|^2 \overset{\text{isometria}}{=}$$
$$\|x-\bar{0}\|^2 + \|y-\bar{0}\|^2 - \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\langle x,y \rangle. \ \square$$

Lauseen todistus. Olkoon $x,y \in E$ ja $a,b \in \mathbb{R}$. Riittää osoittaa että $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$.

Tarkastellaan erotusta $af(x) + bf(y) - f(ax+by)$; lemman 2 nojalla

$$\|af(x) + bf(y) - f(ax+by)\|^2 = \langle af(x)+bf(y)-f(ax+by), af(x)+bf(y)-f(ax+by) \rangle_2$$
$$= a^2\|f(x)\|^2 + 2ab\langle f(x), f(y) \rangle_2 - 2a\langle f(x), f(ax+by) \rangle_2 +$$
$$b^2\|f(y)\|^2 - 2b\langle f(y), f(ax+by) \rangle_2 + \|f(ax+by)\|^2 =$$
$$a^2\|x\|^2 + 2ab\langle x,y \rangle_1 - 2a\langle x, ax+by \rangle_1 + b^2\|y\|^2 - 2b\langle y, ax+by \rangle_1$$
$$+ \|ax+by\|^2 = \langle ax+by-(ax+by), ax+by-(ax+by) \rangle_1 =$$
$$\langle \bar{0}, \bar{0} \rangle_1 = 0.$$

Siten $f(ax+by) = af(x) + bf(y)$. □