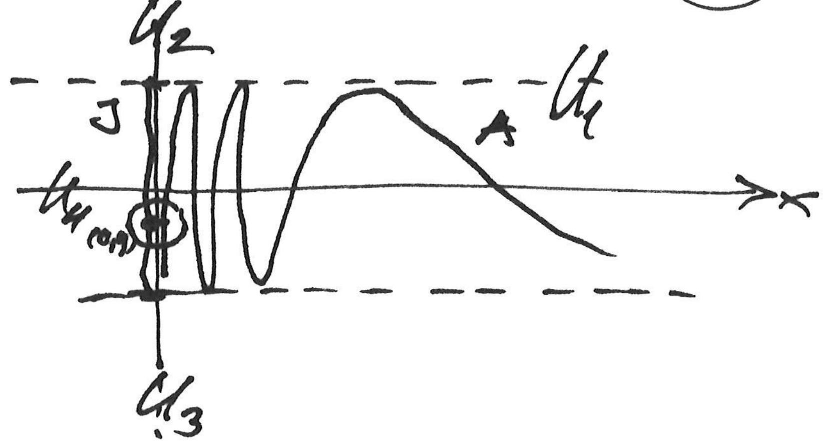
27.4.2010 Topologinen sinikäyrä

$A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x>0\}$

$J = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$



Kuvaus $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$ kun $x>0$, on jatkuva. Siten $A = f]0,\infty[$ on yhtenäinen, jopa polkuyhtenäinen.

Osoitetaan, että $\overline{A} = A \cup J$. Olkoon $(0,y) \in J$ ja $\varepsilon > 0$. Löytyy sellainen indeksi n, että pisteille $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}$ ja $x_{n+1} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+(n+1)\pi}$ pätee $0<x_{n+1}<x_n<\varepsilon$. Lisäksi $\sin\frac{1}{x_n} = 1$ ja $\sin\frac{1}{x_{n+1}} = -1$. Koska kuvaus $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$ on jatkuva, kun $x>0$, Bolzanon lauseen perusteella löytyy sellainen $x_0 \in [x_{n+1}, x_n]$, että $\sin\frac{1}{x_0} = y$. Tällöin $(x_0, \sin\frac{1}{x_0}) \in B((0,y),\varepsilon) \cap A$, joten $(0,y) \in \overline{A}$. Siis $J \subset \overline{A}$.

Osoitetaan, että $A \cup J$ on suljettu $\mathbb{R}^2$:ssa, jolloin sulkeuman minimiominaisuuden perusteella $\overline{A} = A \cup J$. Olkoon $U_1 = \{(x,y) \mid x>0\}$, se on avoin $\mathbb{R}^2$:ssa. Kuvaus $g: U_1 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = y - \sin\frac{1}{x}$ kun $(x,y) \in U_1$, on jatkuva. Siten $A = g^{-1}\{0\}$ on suljettu avaruudessa U_1, joten $U_1 \setminus A$ on avoin U_1:ssä. Koska tämä on avoin $\mathbb{R}^2$:ssa, joukko $U_1 \setminus A$ on avoin myös $\mathbb{R}^2$:ssa. Joukot $U_2 = \{(x,y) \mid y>1\}$, $U_3 = \{(x,y) \mid y<-1\}$ ja $U_4 = \{(x,y) \mid x<0\}$ ovat selvästi avoimia $\mathbb{R}^2$:ssa. Siten $\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup J)$ $(U_1 \setminus A) \cup (\bigcup_{k=2}^{4} U_k)$ on avoin $\mathbb{R}^2$:ssa, joten $A \cup J$ on suljettu siinä.

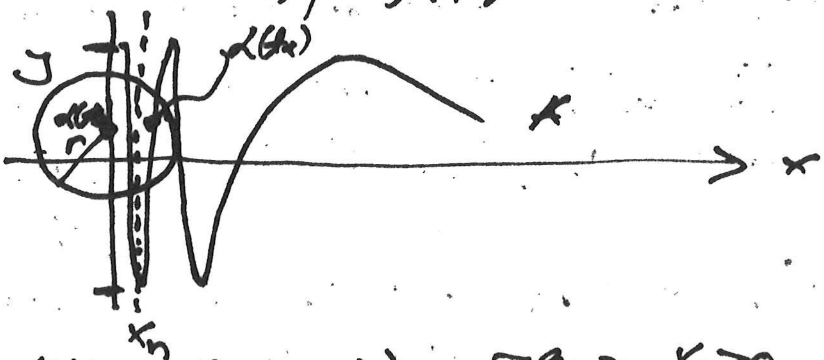
On siis osoitettava, että $\bar{A} = A \cup J$.

Koska A on yhtenäinen, lauseen 14.11 perusteella $A \cup J = \bar{A}$ on yhtenäinen. Osoitetaan lopuksi, ettei se kuitenkaan ole polkuyhtenäinen. VO: $A \cup J$ on polkuyhtenäinen.

Silloin löytyy sellainen polku $\alpha : [0,1] \to A \cup J$, että $\alpha(0) \in A$ ja $\alpha(1) \in J$. Huomaa, että $A \cap J = \emptyset$. Olkoon $t_0 = \inf\{t \in [0,1] \mid \alpha(t) \in J\}$. Silloin α:n jatkuvuuden perusteella, ja koska $\alpha(0) \in A$ ja J on suljettu, pätee $0 < t_0 \le 1$. Koska J on suljettu ja α on jatkuva, niin $\alpha(t_0) \in \bar{J} = J$. Erityisesti $\alpha(t) \in A$ kaikilla $t \in [0, t_0[$.

Olkoon $0 < r < 1$. Koska α on jatkuva, löytyy sellainen $0 \le t_1 < t_0$, että

$$\alpha(t) \in B(\alpha(t_0), r) \cap A \text{ kaikilla } t \in [t_1, t_0[.$$



Olkoon $\alpha(t_1) = (x_1, \sin\frac{1}{x_1})$, jolloin $x_1 > 0$. Löytyy sellainen indeksi n, että pisteelle $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}$ pätee $0 < x_n < x_1$ ja $(x_n, \sin\frac{1}{x_n}) \notin B(\alpha(t_0), r)$.

Olkoon $U = \{(x,y) \mid x > x_n\}$ ja $V = \{(x,y) \mid x < x_n\}$. Ne ovat avoimia $\mathbb{R}^2$:ssa. Lisäksi $\alpha(t_1) \in U$, $\alpha(t_0) \in V$, $U \cap V = \emptyset$ ja $\alpha[t_1, t_0] \subset U \cup V$. Siten joukko $\alpha[t_1, t_0]$ ei olisi vastoin aiempaa tietoa yhtenäinen (α jva). Ristiriita osoittaa, ettei $A \cup J$ ole polkuyhtenäinen.