Esimerkki liittyen Heine-Borelin lauseeseen (Lause 13.2)

Tarkastellaan jatkuvien funktioiden avaruutta $E = C([0,1], \mathbb{R})$ varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x\in[0,1]\}$. Kiinnitetään jatkuva funktio $h:[0,1]\to\mathbb{R} \in E$, ja tutkitaan kuvausta (lineaarinen funktionaali)

$$\alpha: E\to\mathbb{R}, \quad \alpha(f)=\int_0^1 h(x)f(x)\,dx \text{ kun } f\in E. \quad (1)$$

Kuvaus $\alpha:(E,\|\cdot\|_\infty)\to\mathbb{R}$ on jatkuva: kun $f,g\in E$, niin

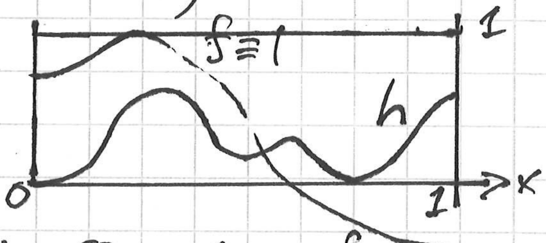
$$|\alpha(f)-\alpha(g)| = \left|\int_0^1 h(x)(f(x)-g(x))\,dx\right| \le \int_0^1|h(x)|\,|f(x)-g(x)|\,dx \le \int_0^1 |h(x)|\,\|f-g\|_\infty\,dx$$
$$= \|f-g\|_\infty \int_0^1|h(x)|\,dx,$$

joten α on E:ssä $\int_0^1|h(x)|\,dx$-Lipschitz.

Tarkastellaan α:n saamia arvoja sup-normiavaruuden $(E,\|\cdot\|_\infty)$ suljetussa yksikkökuulassa $\overline{B} = \overline{B}(\bar{0},1) = \{f\in E \mid \|f\|_\infty\le 1\}$, joka on tunnetusti myös rajoitettu.

(1) Jos $h(x)\ge 0$ kaikilla $x\in[0,1]$, niin kuvaus α selvästi saavuttaa maksiminsa joukossa $\overline{B}$, nimittäin pisteessä $f\equiv 1$ (vakiokuvaus):

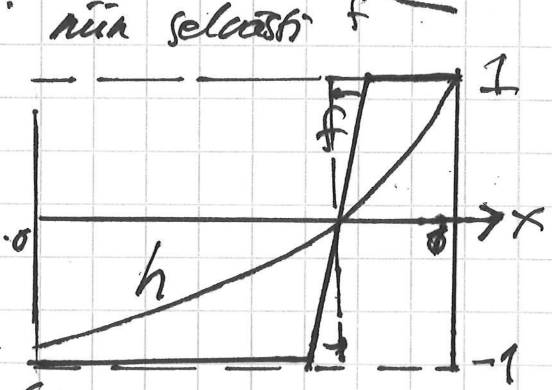
$$\exists \max\{\alpha(f) \mid f\in\overline{B}\} = \alpha(1) = \int_0^1 h(x)\,dx$$



(2) Jos $h(0)<0$ ja $h(1)>0$, niin selvästi

$$\sup\{\alpha(f) \mid f\in\overline{B}\} = \int_0^1|h(x)|\,dx,$$

mutta $\alpha(f) < \int_0^1|h(x)|\,dx$ kaikilla $f\in\overline{B}$.



Siten ei olemassa maksimiarvoa $\max\{\alpha(f) \mid f\in\overline{B}\}$, vaikka kuula $\overline{B}$ on suljettu ja rajoitettu.

Syy: $\overline{B}$ ei ole kompakti, mitä emme tässä todisteta ohessa.