Luku 12, s. 94

Lauseen 12.15 todistus: Lauseen 11.33 nojalla riittää, että jokaisella $a \in \bar{A}$ on olemassa raja-arvo $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$ $(= g(a))$. Lauseen 11.6 nojalla löytyy A:n jono (x_n), jolla $x_n \to a$. Suppenevana se on Cauchy, ja koska f on tasaisesti jatkuva A:ssa, kuvajono $(f(x_n))$ on Lauseen 12.14 nojalla Cauchy Y:ssä. Koska tämä on täydellinen, niin $f(x_n) \to b \in Y$.

Apulause. On olemassa $\lim_{x \to a, x \in A} f(x)$, ja se on b.

Tod. Olkoon (y_n) A:n jono, jolla $y_n \to a$. Kuten edellä nähtiin, sen kuvajono suppenee: $f(y_n) \to c \in Y$. A:n jonolle $(z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$ pätee $z_n \to a$, joten myös $(f(z_n))$ suppenee. Siten $b = c$. Siis $f(y_n) \to b$.

VO: $\lim_{x \to a, x \in A} f(x) \neq b$. Tällöin löytyy $b \in V \subset Y$ ja jokaisella n sellainen $x_n \in A \cap B(a, \frac{1}{n})$, että $f(x_n) \notin V$. Tällöin (x_n) on A:n jono, jolla $x_n \to a$, mutta $f(x_n) \not\to b$ ↯. $\square$

Näin on alkuosa todistettu: $g(x) = \lim_{y \to x, y \in A} f(y)$ on f:n jatkuva jatke joukkoon $\bar{A}$.

Loppuosa eli g:n tasainen jatkuvuus: Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva A:ssa, löytyy sellainen $\delta > 0$, että $e(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$ kaikilla $x, y \in A$, joilla $d(x,y) < 3\delta$.

Olkoon $a, b \in \bar{A}$ ja $d(a,b) < \delta$. Tällöin löytyy pisteet $x, y \in A$, että $d(x,a), d(y,b) < \delta$ ja $e(f(x), g(a)), e(f(y), g(b)) < \varepsilon/3$.

Tällöin $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) < 3\delta$, joten $e(f(x), f(y)) < \varepsilon/3$.

Siten $e(g(a), g(b)) \leq e(g(a), f(x)) + e(f(x), f(y)) + e(f(y), g(b)) < \varepsilon$.

Siten g on tasaisesti jatkuva joukossa $\bar{A}$. $\square$