Kuratowskin upotuslause (Väisälän teht. 2.16).

Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Tällöin on demassa normiavaruus $(E, |\cdot|)$ ja kuvaus

$\phi : X \to E$, joka säilyttää etäisyyden (ns. isometria):

$$|\phi(x) - \phi(y)| = d(x,y) \text{ kaikilla } x,y \in X. \quad (*)$$

Huom. Isometria on aina injektio.

Tod. Kiinnitetään $x_0 \in X$. Jokaista $x \in X$ kohti määritellään funktio

$$f_x : X \to \mathbb{R}, \quad f_x(t) = d(t,x) - d(t,x_0). \quad (1)$$

Tällöin $|f_x(t)| = |d(t,x) - d(t,x_0)| \overset{\text{lause 2.10}}{\leq} d(x,x_0)$ kaikilla $t \in X$, (2)

joten $f_x \in \mathrm{raj}(X,\mathbb{R})$, ~~jossa~~ kaikilla $x \in X$. (3)

Huom. f_x on myös jatkuva, mutta tätä ei nyt käytetä.

Voidaan valita $E = \mathrm{raj}(X,\mathbb{R})$, jossa perkeittäiset laskutoimitukset ja supnormi $\|\cdot\|_\infty$; määritellään kuvaus

$$\phi : X \to E, \quad \phi(x) = f_x \text{ kaikilla } x \in X. \quad (4)$$

Osoitetaan vielä että $\|\phi(x) - \phi(y)\|_\infty = d(x,y)$ kaikilla $x,y \in X$ eli $(*)$. Olkoot x,y ja $t \in X$ mielivaltaiset. Tällöin

$$|(\phi(x) - \phi(y))(t)| = |f_x(t) - f_y(t)| \overset{(1)}{=} |d(t,x) - d(t,x_0) - d(t,y) + d(t,x_0)|$$

$$= |d(t,x) - d(t,y)| \overset{\text{l. 2.10}}{\leq} d(x,y), \text{ joten}$$

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_\infty = \sup_{t \in X} (\phi(x) - \phi(y))(t) \leq d(x,y). \quad (5)$$

Toisaalta $|(\phi(x) - \phi(y))(x)| = |d(x,x) - d(x,y)| = d(x,y)$, joten

$\|\phi(x) - \phi(y)\|_\infty \geq d(x,y)$ (6), ja (5)&(6) $\Rightarrow$ $(*)$. $\square$