Esim

Oletetaan $U, V \sim U(0,1)$ ja $U \perp\!\!\!\perp V$

Asetetaan $\begin{cases} X = 3U \\ Y = \dfrac{U^2}{1-V} \end{cases}$

1) Määrää $f_{X,Y}$ (sekä kerro missä joukossa $f_{X,Y}$ on $=0$ ja missä >0)

2) Laske f_X ja f_Y.

Kohta 1

Merkitään $g(u,v) = \begin{pmatrix} 3u \\ \dfrac{u^2}{1-v} \end{pmatrix}$. Tällöin $(X,Y) = g(U,V)$

· Näytetään, että $g: A \to B$ on diffeomorfismi sopivilla avoimilla $\underset{\mathbb{R}^2}{\overset{}{A}} \subset$ ja $B \subset \mathbb{R}^2$.

* Koska $U, V \sim U(0,1)$, niin $\boxed{A = (0,1) \times (0,1)}$ voisi käydä.

* Ratk. yhtälöt $g(u,v) = (x,y)$ (josta löytäisimme käänt. funktion $h(x,y) = (u,v)$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u = x \\ \dfrac{u^2}{1-v} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3}x \\ 1-v = \dfrac{u^2}{y} = \frac{1}{9}x^2y^{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{3}x \\ v = 1 - \frac{1}{9}x^2y^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow h(x,y) = (u,v)$$

kun $h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x \\ 1 - \frac{1}{9}x^2y^{-1} \end{pmatrix}$.

$\therefore$ Löysimme kandidaatin käänteisfunktiolle $h: B \to A$ (mutta emme vielä tiedä, mikä B on)

* Kaksi tapaa löytää B:

1) $B = g(A) = \{ g(u,v) \,;\, (u,v) \in A = (0,1)\times(0,1) \}$

2) $h(B) = A$

$B = h^{-1}(A) = \{ (x,y) \,;\, h(x,y) \in A = (0,1)\times(0,1) \}$

Sovelletaan tapaa 2)

$\Rightarrow$ Jos $(x,y)\in B$, niin $\begin{cases} 0 < h_1(x,y) < 1 \\ 0 < h_2(x,y) < 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{1}{3}x < 1 \\ 0 < 1 - \frac{1}{9}x^2y^{-1} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ -1 < -\frac{1}{9}x^2y^{-1} < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ \underbrace{0 < \frac{1}{9}x^2y^{-1}}_{\Rightarrow\ y^{-1} > 0 \ \Leftrightarrow\ y > 0} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 3 \\ y > 0 \\ 0 < \frac{1}{9}x^2 < y \end{cases}$

$\therefore$ Jos $(x,y)\in B$, niin $\begin{cases} 0 < x < 3 \\ y > \frac{1}{9}x^2 \end{cases}$

Jos $\begin{cases} 0 < x < 3 \\ y > \frac{1}{9}x^2 \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{1}{3}x < 1$ ja $1 - \underbrace{\frac{1}{9}x^2y^{-1}}_{>0} < 1 - 0 = 1$

Sekä

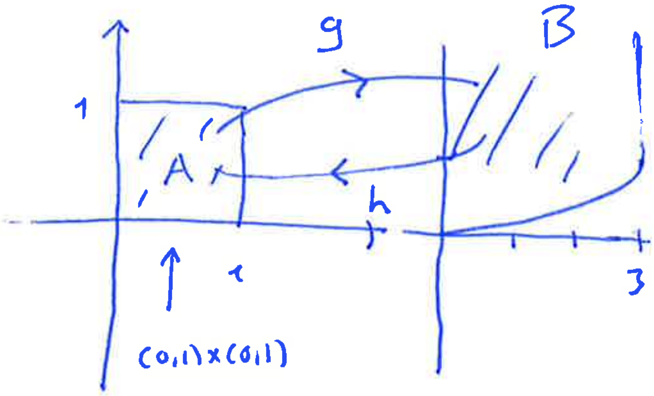
$1 - \frac{1}{9}x^2 \overbrace{y^{-1}}^{< 9x^{-2}} > 1 - \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{9}}\cancel{x^2}\cdot\cancel{9}\cancel{x^{-2}}}_{=1} = 0$, $\quad y > \frac{1}{9}x^2$

$\therefore \begin{cases} 0 < h_1(x,y) < 1 \\ 0 < h_2(x,y) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)\in B.$

$\therefore \boxed{B = \{ (x,y) \,;\, 0 < x < 3,\ y > \frac{1}{9}x^2 \}}$

$\frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{2u}{1-v} \end{pmatrix}$ on jva A:ssa

$\frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2(1-v)^{-2} \end{pmatrix}$ — " —



$\frac{\partial}{\partial x} h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{9} x y^{-1} \end{pmatrix}$ on jva B:ssä (sillä $(x,y) \in B$ $\Rightarrow y \neq 0$)

$\frac{\partial}{\partial y} h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} x^2 y^{-2} \end{pmatrix}$ — " — (— " — $\Rightarrow y \neq 0$)

$\therefore$ g on diffeomorfismi $A \longrightarrow B$

ja luetajen mukaan

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} f_{U,V}(h_1(x,y), h_2(x,y)) \cdot |J_h(x,y)|, & \text{kun } (x,y) \in B \\ \textcircled{h} & \text{, muuten} \end{cases}$$

* Koska $h(x,y) \in A$ aina kun $(x,y) \in B$,

ja $f_{U,V}(u,v) = \mathbb{1}\{u \in (0,1), v \in (0,1)\}$ (sillä $U, V \sim U(0,1)$ ja $U \perp\!\!\!\perp V$)

niin

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} |J_h(x,y)| & \text{, kun } (x,y) \in B \\ 0 & \text{, muuten} \end{cases}$$

Jacobiaani $J_h(x,y) = \det \begin{pmatrix} \partial/\partial x\, h_1 & \partial/\partial y\, h_1 \\ \partial/\partial x\, h_2 & \partial/\partial y\, h_2 \end{pmatrix}$

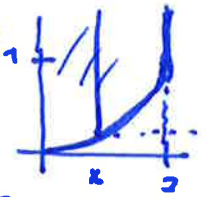
$= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{9} x y^{-1} & \frac{1}{9} x^2 y^{-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} x^2 y^{-2} - 0 \cdot (-\frac{2}{9} x y^{-1})$

sarake sama kuin $\frac{\partial}{\partial x} h$; $\frac{\partial}{\partial y} h$

$= \frac{1}{27} x^2 y^{-2}$

$$\therefore \boxed{f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{27} x^2 y^{-2} & \text{, kun } 0 < x < 3 \text{ ja } y > \frac{1}{9} x^2 \\ 0 & \text{, muutoin} \end{cases}}$$

Kohta 2 Laske f_X ja f_Y.



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{1/9\, x^2}^{\infty} \frac{1}{27} x^2 y^{-2}\,dy \cdot 1\{0<x<3\}$$

$$= \left(\Big/_{y=1/9\, x^2}^{\infty} -y^{-1} \right) \cdot \frac{1}{27} x^2 \cdot 1\{0<x<3\}$$

$$= (-0 + 9x^{-2}) \cdot \frac{1}{27} x^2 \cdot 1\{0<x<3\} = \frac{1}{3}\, 1\{0<x<3\}$$

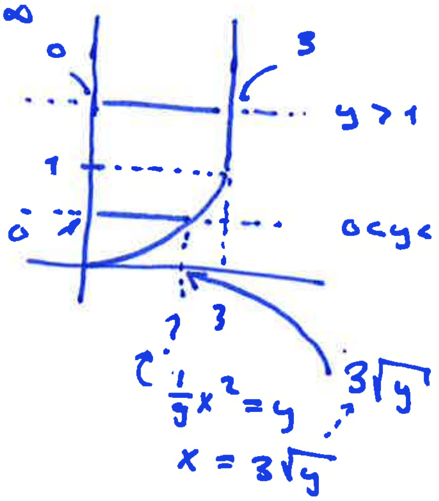
$\therefore X \sim U(0,3)$

(Tämän olisi saanut myös suoraan $X = 3U$:sta)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = 1\{0<y\le 1\} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots dx + 1\{y>1\} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots dx$$

miksi?

$$= 1\{0<y\le 1\} \int_0^{3\sqrt{y}} \frac{1}{27} x^2 y^{-2}\,dx + 1\{y>1\} \int_0^{3} \frac{1}{27} x^2 y^{-2}\,dx$$



$$= 1\{0<y\le 1\} \cdot \frac{1}{\cancel{27}} \cdot \frac{1}{3} \underbrace{(3\sqrt{y})^3}_{= \cancel{27}\, y^{3/2}} \cdot y^{-2} + 1\{y>1\} \cdot \frac{1}{\cancel{27}} \cdot \frac{1}{3} \underbrace{(3)^3}_{= \cancel{27}} \cdot y^{-2}$$

$$= 1\{0<y\le 1\} \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{y^{3/2-2}}_{= y^{-1/2}} + 1\{y>1\} \cdot \frac{1}{3} \cdot y^{-2} = \begin{cases} \frac{1}{3} y^{-1/2}, & 0<y\le 1 \\ \frac{1}{3} y^{-2}, & y>1 \end{cases}$$

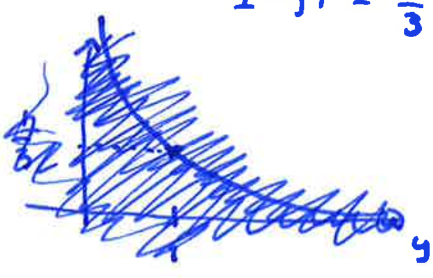
[onko f_Y varmasti tf?

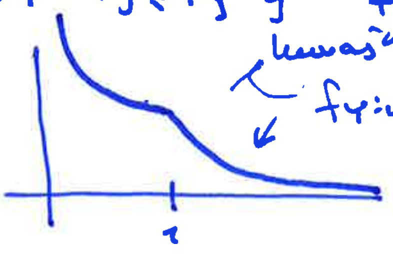
- $f_Y \ge 0$ ok
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{3} y^{-1/2}\,dy + \int_1^{\infty} \frac{1}{3} y^{-2}\,dy$

$$= \frac{1}{3} \Big/_0^1 \frac{y^{1/2}}{1/2} + \frac{1}{3} \Big/_1^{\infty} -y^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2(1-0) + \frac{1}{3}(-0+1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1 \quad \underline{\text{ok}}\,)$$

Vast.
$$f_X(x) = \frac{1}{3}\, 1\{0<x<3\}$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{3}\left(1\{0<y\le 1\} \cdot y^{-1/2} + 1\{1<y\} \cdot y^{-2} \right)$$





kuvaaja f_Y:n (suunnilleen)