

Todennäköisyyslaskenta II, kertaustehtäviä (2 periodi)

Huom! Kertaustehtäviä ei tarvitse palauttaa, ne on tarkoitettu 2. periodin asioiden lisäharjoittelua varten. Vinkkejä voi kysellä Presemon kautta.

Huom! Lisään tehtäviä pikkuhiljaa. Jos vielä lisään tämän jälkeen jotain, niin ilmoitan heti presemonssa

1. Olkoon X sm, joka on integroituva ja $\mathbb{E}|X| = 4$. Määrää Markovin ey:n avulla yläraja-arvioita seuraaville tn:ille

a) $\mathbb{P}(X > 32)$

b) $\mathbb{P}(X^2 > 256)$

2. Olkoon X sm, jolla on varianssi $\text{var } X = 16$. Jos emme tiedä tarkkaan, mikä on satunnaismuuttujan X odotusarvo, mutta tiedämme, että $1 < \mathbb{E}X < 3$, niin mitä voimme Tšebyševin ey:n avulla sanoa luvusta $\alpha > 0$, jolle

$$\mathbb{P}(|X| > 9) \leq \alpha.$$

3. Oletetaan, että X on sm, jolle $\mathbb{P}(X \in (0, 1)) = 1$ ja $\mathbb{E}X = 3/4$. Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{E} \exp(2X)$ on äärellinen. Määrää jokin $\alpha > 0$, että

$$\mathbb{E} \exp(2X) \geq \alpha$$

4. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma yhteistiheysfunktioilla

$$f_{X,Y}(x, y) = cx^2y \times \mathbf{1}\{0 \leq x < y \leq 1\}$$

a) Määrää vakio c

b) Määrää reunatiheysfunktio f_X

c) Määrää reunatiheysfunktio f_Y

5. Olkoon sv:n $Z = (X, Y)$ tiheysfunktio kuten edellisessä tehtävässä.

a) laske sv:n Z odotusarvovektori

b) laske sv:n Z kovarianssimatriisi

6. Olkoon sv:n $Z = (X, Y)$ tiheysfunktio kuten edellisessä tehtävässä.

a) Laske ehdollinen tiheys $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$.

b) Laske ehdollinen tiheys $x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$.

7. Olkoon sv:n $Z = (X, Y)$ tiheysfunktio kuten edellisessä tehtävässä.

- a) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X | Y = y)$
- b) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(Y | X = x)$

8. Olkoon sv:llä (U, V) tasajakauma alueessa $[1, 2] \times [1, 2]$. Määritellään sv (X, Y) muunnoksena

$$\begin{cases} X = U + 4V \\ Y = U^3 \end{cases}$$

Määrää sv:n (X, Y) yhteistiheysfunktio.

9. Olkoon $X|Y \sim N(Y, 2)$ ja $Y \sim \text{Bin}(5, \frac{3}{5})$. Laske

- a) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X|Y)$
- b) Laske odotusarvo $\mathbb{E}X$.
- c) Laske varianssi $\text{var} \mathbb{E}(X|Y)$.
- d) Laske ehdollinen varianssi $\text{var}(X|Y)$.
- e) Laske varianssi $\text{var} X$.

10. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ ja $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ riippumattomia standardinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita ja olkoon $Z = (X_1 - Y_2, 2X_1 + Y_3 + 7, 3Y_1 - X_2)$. Määrää satunnaismuuttujan jakauma.

11. Olkoon X ja Y riippumattomia eksponenttijakautuneita satunnaismuuttujia parametrilla $\lambda > 0$. Määritellään

$$\begin{pmatrix} S \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + Y \\ X \end{pmatrix}$$

Johda sv:n (S, U) yhteistiheysfunktio $f_{S,U}$ tiheysfunktion muuntokaavalla.

12. Olkoon X, Y, S ja U kuten edellisessä tehtävässä.

- a) Johda ehdollinen tiheys $f_{S|U}$ näyttämällä suoraan, että kertymäfunktioille pätee

$$F_{S|U}(s|u) = \mathbb{P}(S \leq s|U = u) = F_Y(s - u)$$

- b) Johda yhteistiheysfunktio $f_{S,U}$ kertolaskusäännöllä.
- c) Johda ehdollinen tiheysfunktio $u \mapsto f_{U|S}(u|s)$. Mikä jakauma on kyseessä?

13. Olkoon X, Y ja Z kuten tehtävässä 10. Päättele, että satunnaismuuttujat Z_3^2 ja $\exp(Z_1 + 4Z_2)$ ovat riippumattomia, kun $Z = (Z_1, Z_2, Z_3)$.

14. Olkoon X, Y ja Z kuten edellisessä tehtävässä. Määrää

- a) satunnaisvektorin $W = (Z_1, Z_3)$ jakauma
- b) satunnaismuuttujan Z_2 ehdollinen jakauma $Z_2 | (W = w_1, w_2)$ ehdolla $W = (w_1, w_2)$.

15. Satunnaismuuttujat X ja Y noudattavat hierarkista mallia

$$\begin{cases} Y | X \sim U(1, 3X) \\ X \sim U(2, 4) \end{cases}$$

(missä $U(a, b)$ tarkoittaa tasajakaumaa välillä (a, b) .)

- a) Laske $\mathbb{E}Y$
- b) Laske $\text{var } Y$
- c) Laske yhteistiheysfunktio $f_{X,Y}$.