Indikaattorifunktioista

Laskusääntöjä

1) $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cap B}$ kaikilla joukoilla A, B

2) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A \cup B}$, jos $A \cap B = \emptyset$

3) Jos A on tapahtuma niin
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}\, \mathbb{1}_A$$

Perustelu

$x \in A \cap B$ $\Leftrightarrow$ $x \in A$ ja $x \in B$ $\Rightarrow$ $\mathbb{1}\{A \cap B\}(x) = 1$

$= 1$
$\Leftrightarrow x \in A \cap B$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbb{1}_A(x) = 1 \\ \mathbb{1}_B(x) = 1 \end{cases}$
$\Rightarrow \mathbb{1}_A(x) \cdot \mathbb{1}_B(x) = 1$
$\Leftarrow$ sillä muuten tulo $= 0$.

Merkintöjä

- $\mathbb{1}_A$ ja $\mathbb{1}\{A\}$ (kuvauksina)
- arvoina

$$\mathbb{1}_A(x), \quad \mathbb{1}\{A\}(x)$$

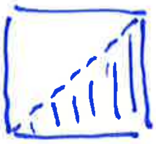
Esim X s.m. Tapahtuma

$$\{a < X < b\} = \{X > a \text{ ja } X < b\}$$

Indikaattoreille vastaava

$$\mathbb{1}\{a < X < b\} = \mathbb{1}\{X > a \text{ ja } X < b\} \underset{1)}{=} \mathbb{1}\{X > a\}\, \mathbb{1}\{X < b\}.$$

Esim Jakolaskussa (YTF)



YTF: $f_{X,Y}(x,y) = c \cdot \mathbb{1}\{0 < x < 1,\ 0 < y < x\}$

$\Rightarrow c = 2$ (koska $1 = \int f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = c \cdot \frac{1}{2}$)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\, \mathbb{1}\{f_Y(y) > 0\}$$

Käytämme sopimusta, että $0 \cdot$ niitä vain oli olemassa tai ei $= 0$

$$\therefore \quad f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}, & \text{kun } f_Y(y) > 0 \\ 0, & \text{kun } f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

eli riippuen onko $\mathbb{1}\{f_Y(y) > 0\} = 1$ vai $= 0$.

Nyt
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbb{1}\{0<x<1,\ 0<y<x\}}\,dx$$

$$= \mathbb{1}\{0<x<1,\ 0<y<x<1\}$$

$$= \mathbb{1}\{0<x<1\}\,\mathbb{1}\{0<y<x<1\}$$

tämä int. rajoihin

$$= 2\int_0^1 \underbrace{\mathbb{1}\{0<y<x<1\}}\,dx$$

$$= \mathbb{1}\{0<y<1,\ y<x<1\}$$

$$= \underbrace{\mathbb{1}\{0<y<1\}}\,\mathbb{1}\{y<x<1\}$$

ei riipu integr. muuttujasta x

$$= 2\,\mathbb{1}\{0<y<1\}\int_0^1 \mathbb{1}\{y<x<1\}\,dx$$

← voidaan viedä int. rajoihin sillä $0<y$.

$$= 2\,\mathbb{1}\{0<y<1\}\int_y^1 dx$$

$$= 2\,\mathbb{1}\{0<y<1\}\cdot(1-y)$$

$$\Rightarrow \quad f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathbb{1}\{f_Y(y)>0\}$$

$$= \frac{2\,\mathbb{1}\{0<x<1,\ 0<y<x\}}{2\,\mathbb{1}\{0<y<1\}\cdot(1-y)}\cdot\mathbb{1}\{f_Y(y)>0\}$$

Indikaattorifunktiolla jakaminen

3) $\frac{\mathbb{1}_A}{\mathbb{1}_B} = \mathbb{1}_A$ kunhan $A \subseteq B$

Esim (jatkuu)

Nyt $\mathbb{1}\{f_Y(y) > 0\} = \mathbb{1}\{\underset{>0}{2}\, \underbrace{\mathbb{1}\{0<y<1\}\cdot(1-y)}_{\geq 0} > 0\}$

ja >0 kun $0<y<1$

$= \mathbb{1}\{0<y<1,\ (1-y)>0\} = \mathbb{1}\{0<y<1,\ y<1\}$
$= \mathbb{1}\{0<y<1\}.$

$\therefore\ f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\, \mathbb{1}\{f_Y(y)>0\}$

$= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{2\cdot(1-y)}\, \underbrace{\frac{\mathbb{1}\{0<y<1\}}{\mathbb{1}\{0<y<1\}}}$

$= \frac{\cancel{2}\, \mathbb{1}\{0<x<1,\ 0<y<x\}}{\cancel{2}\,(1-y)} \cdot \mathbb{1}\{0<y<1\}$ (3) $\mathbb{1}\{0<y<1\}$

$= \frac{\mathbb{1}\{y<x<1\}}{1-y} \cdot \mathbb{1}\{0<y<1\}$

$= \begin{cases} \frac{\mathbb{1}\{y<x<1\}}{1-y} & \text{kun } 0<y<1 \\ 0 & \text{muutoin.} \end{cases}$