Todennäköisyyslaskenta II, 12. harjoitus (7.12.–11.12.2015)

1. Olkoon y_i kaupungissa i tietyn vuoden aikana tiettyyn sairauteen kuolleiden henkilöiden lukumäärä, ja olkoon x_i kyseisen kaupungin asukasluku, kun $i = 1, \ldots, n$. Tässä tehtävässä käytämme mallia, jonka mukaan y_i:t ovat riippumattomien Poissonin jakaumia noudattavien satunnaismuuttujien Y_i havaittuja arvoja, joiden jakauma on $Y_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Parametri λ on kyseisestä taudista aiheutuva kuolleisuus henkilövuotta kohti.

a) Kirjoita uskottavuusfunktio $\lambda \mapsto f(y \mid \lambda)$, missä $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

b) sekä etsi parametrin suurimman uskottavuuden estimaatti λ^{ML}.

2. Käsittelemme nyt edellisen tehtävän Bayes-versiota. Parametri $\Lambda > 0$ on jatkuvasti jakautunut satunnaismuuttuja. Ehdolla Λ sm:t $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat ehdollisesti riippumattomia, ja $(Y_i \mid \Lambda = \lambda) \sim \mathrm{Poi}(\lambda x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Parametrin Λ priorijakauma on $\mathrm{Gam}(\alpha, \beta)$, jossa $\alpha, \beta > 0$ ovat vakioita. Johda posteriorijakauma $(\Lambda \mid Y = y)$, jossa $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ on havaintoja vastaava satunnaisvektori ja $y = (y_1, \ldots, y_n)$, jossa luvut $y_i \geq 0$ ovat havaittuja lukumääriä.

3. Olkoon $X \sim N_n(\mu, \Sigma)$, jossa Σ on positiivisesti definiitti matriisi. Olkoon $Y = (X - \mu)^\top \Sigma^{-1} (X - \mu)$. Selvitetään satunnaismuuttujan Y jakauma.

a) Päättele, että löydömme sellaisen sv:n Z, että $Y = Z^\top Z$. (Vihje: käytä Choleskyn hajotelmaa $AA^\top = \Sigma$. Esitä Σ^{-1} neliömatriisin A käänteismatriisin (ja sen transpoosin) avulla. Näiden avulla Z löytyy)

b) Mikä on sv:n Z jakauma? (Vihje: affiini muunnos X:stä)

c) Mikä on siten sm:n Y jakauma?

4. Hieman epäsymmetristä yksinkertaista jatkuvatilaista satunnaiskulun tilaa X_n ajan hetkellä $n = 1, 2, 3, \ldots$ kuvaa sen siirtymien summa

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

missä $W_k \sim N_1(\mu, h)$ ja $\mathrm{cov}(W_k, W_l) = 0$, kun $k \neq l$.

a) Esitä satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ ja $W_1, \ldots, W_n$ satunnaisvektoreina X ja W sekä määrää matriisi A jolla $X = AW$

b) määritä satunnaisvektorin X jakauma, kun oletetaan lisäksi, että satunnaisvektorilla W on multinormaalijakauma.

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske sm:n X_5:n ehdollinen tiheys, ehdolla, että $X_2 = a$. (opastus: voit käyttää Luentojen lausetta 10.6 tai voit etsiä satunnaismuuttujan V, jolle $X_5 = V + X_2$ ja jolle $X_2 \perp\!\!\!\perp V$, tällöin X_5:n jakauma ehdolla $X_2 = a$ on sama kuin sm:n $V + a$ jakauma)

6. Olkoon $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalivakiomatriisi. Tämä tarkoittaa, että Q on kääntyvä ja $Q^{-1} = Q^\top$. Määritellään $X = 2QU$, missä $U \sim N_n(0, I_n)$ on standardinormaalijakautunut satunnaisvektori. Oletetaan, että $n \geq 5$ ja muodostetaan satunnaisvektori $Y = (X_1, \ldots, X_4)$.

a) Ovatko satunnaisvektorit X ja $2U$ samoin jakautuneita?

b) Mikä on satunnaismuuttujan $W = Y^\top Y$ jakauma? (vihje: jokin luvun 5 jakaumista on kyseessä. Kannattaa ensin miettiä mikä on satunnaismuuttujan $W/4$ jakauma.)