Todennäköisyyslaskenta II, 11. harjoitus (30.11.–4.12.2015)

1. Olkoon X sm, $Y = (Y_1, Y_2)$ sv ja olkoon sv $Z = (X, Y_1, Y_2)$. Sv:n Z odotusarvovektori on

$$\mathbb{E}Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ja sv:n Z kovarianssimatriisi $\mathrm{Cov}(Z)$ on jokin seuraavista matriiseista

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 19 \end{pmatrix}.$$

Mikä matriiseista on $\mathrm{Cov}(Z)$? Perustele.

2. Jatkoa tehtävään 1. Laske (tai lue suoraan): *a*) $\mathrm{var}(X)$, *b*) $\mathrm{Cov}(Y)$, *c*) $\mathrm{cov}(X, Y)$, *d*) satunnaisvektorin (Y_2, X) kovarianssimatriisi sekä *e*) $\mathrm{var}(Y_2 - 2X + 5)$

3. Olkoot X ja Y n-ulotteisia satunnaisvektoreita, joille $\mathrm{Cov}(X) = \Sigma_X$, $\mathrm{Cov}(Y) = \Sigma_Y$ sekä $\mathrm{cov}(X, Y) = \Sigma_{XY}$ Johda niiden luennoissakin oleva kaava summan kovarianssimatriisille

$$\mathrm{Cov}(X + Y) = \Sigma_X + \Sigma_Y + \Sigma_{XY} + \Sigma_{XY}^\top.$$

seuraavalla (toisella) tavalla:

Tarkastele osavektoreista X ja Y muodostettua yhdistettyä $2n$-ulotteista vektoria $Z = (X, Y)$, jossa on ensin sv:n X komponentit ja sitten sv:n Y komponentit. Kirjoita $\mathrm{Cov}(Z)$ annettujen matriisien avulla, esitä summa $X+Y$ muodossa AZ valitsemalla matriisi A sopivasti, sekä sovella kaavaa $\mathrm{Cov}(AZ) = A\,\mathrm{Cov}(Z)A^\top$.

4. (Choleskyn hajotelma.) Olkoon $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ kaksiulotteisen satunnaisvektorin $Z = (X, Y)$ kovarianssimatriisi. Etsi alakolmiomatriisi A, jolle $AA^\top = C$. (Opastus: Alakolmiomatriisi on muotoa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Kirjoitamalla matriisitulon auki saat neljä yhtälöä, joista 2 ovat samoja. Ratkaise näistä tuntemattomat a_{11}, a_{12} ja a_{22}.

5. Tietystä populaatiosta satunnaisesti valitun miehen ikä A (vuosia), pituus L (cm) ja paino W (kg) mallinnetaan kolmiulotteisella normaalijakaumalla siten, että sv:lle $V = (L, W, A)$

$$\mathbb{E}V = \begin{pmatrix} 180 \\ 80 \\ 38 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Cov}(V) = \begin{pmatrix} 49 & 63 & 0 \\ 63 & 117 & 42 \\ 0 & 42 & 130 \end{pmatrix}$$

a) Mikä on miesten pituuden (reuna-)jakauma?

b) Johda ehdollinen jakauma $W|(A = a, L = l)$. Mikä on 25 vuotta vanhojen ja 165 cm pitkien miesten painon jakauma?

6. Tarkastellaan mittausmallia

$$Y = AX + Z$$

jossa sv $X \sim N(0, I_2)$ ja sv $Z \sim N(0, I_2)$ sekä $X \perp\!\!\!\perp Z$. Matriisi A puolestaan on

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Laske ehdollinen momenttiemäfunktio

$$M_{Z|(X=x)}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\big(\exp(\mathbf{t}^\top Z) \mid X = x\big)$$

(Opaste: päättele ehdollisen odotusarvon määritelmän ja riippumattomuuden avulla että $M_{Z|(X=x)} = M_Z$ ja käytä luentojen tietoa normaalijakauman momenttiemäfunktiosta).

b) Laske ehdollinen momenttiemäfunktio

$$M_{Y|\ (X=x)}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\big(\exp(\mathbf{t}^\top Y) \mid X = x\big)$$

(Opaste: exponenttifunktio kuvaa yhteenlaskun kertolaskuksi. Tämän jälkeen jotain voi viedä ulos ehdollisesta odotusarvosta.)

c) Määrää ehdollinen tiheys $f_{Y|X}$. (Opaste: momenttiemäfunktio ja kohta b)

d) Määrää ehdollinen tiheys $f_{X|Y}$. (Opaste: kohta c) ja Bayesin kaava)