Todennäköisyyslaskenta II, 10. harjoitus (23.–28.11.2015)

1. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia ja oletetaan, että $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on kahden muuttujan skalaariarvoinen kuvaus, jolle $\mathbb{E}g(X,Y)^2 < \infty$. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vapaasti valittu kuvaus ja merkitään $m(X) = \mathbb{E}(g(X,Y) \mid X)$.

a) Näytä laskemalla, että satunnaismuuttujat $g(X,Y) - m(X)$ ja $m(X) - h(X)$ ovat korreloimattomia. Opastus: käytä odotusarvon laskemiseen lausetta 8.3. (eli odotusarvon laskemista iteroituna odotusarvona) sekä ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia

b) sekä päättele edellisen kohdan ja binomikaavan avulla, että

$$\mathbb{E}\big(g(X,Y) - h(X)\big)^2 = \mathbb{E}\big(g(X,Y) - m(X)\big)^2 + \mathbb{E}\big(m(X) - h(X)\big)^2$$

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia ja oletetaan, että $\mathbb{E}g(X,Y)^2 < \infty$. Olkoon $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vapaasti valittu kuvaus. Osoita luentomonisteen lause 8.2. eli näytä että

$$\mathbb{E}(g(X,Y) - m(X))^2 \le \mathbb{E}(g(X,Y) - h(X))^2$$

kun $m(x) = \mathbb{E}(g(X,Y) \mid X = x)$. Opastus: tehtävä 1.

3. Näytä luentomonisteen lause 8.4. eli osoita laskemalla (vaikka tapauksessa satunnaisvektorilla (X,Y) on jatkuva yhteisjakauma), että

$$\operatorname{var}(g(X,Y)) = \mathbb{E}\operatorname{var}(g(X,Y) \mid X) + \operatorname{var}\big(\mathbb{E}(g(X,Y) \mid X)\big)$$

Opastus: laske oikean puolen termit erikseen niin pitkälle kuin ne sievenevät käyttämällä määritelmiä, ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia sekä odotusarvon laskemista iteroituna odotusarvona.

4. Tarkastellaan hierarkkista mallia, jossa $X \sim U(0,1)$ ja $Y \mid (X = x) \sim U(x^2, 2x)$.

a) Laske yhteistiheysfunktio $f_{X,Y}$.

b) Onko satunnaisvektorilla (X,Y) tasajakauma?

c) Laske $\mathbb{E}(Y \mid X = x)$ ja $\operatorname{var}(Y \mid X = x)$.

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Laske

a) Laske $\mathbb{E}Y$ iteroidun odotusarvon kaavalla.

b) Laske $\operatorname{var} Y$ lauseen 8.4. (tai tehtävän 3) kaavalla

c) Laske $\mathbb{E}Y$ lauseen 7.7. avulla (tiedostamattoman tilastotieteilijän laki)

6. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{24}{11}(x+1)\,y\,\mathbf{1}\{\,0 < x < y < 1\,\}$$

a) Laske ehdollinen tiheys $f_{Y|X}$.

b) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(\,Y \mid X\,)$ eli määrää satunnaismuuttujan Y paras ennuste (keskineliövirheen mielessä) satunnaismuuttujan X funktiona

c) Laske satunnaismuuttujan Y paras lineaarinen ennuste (keskineliövirheen mielessä) satunnaismuuttujan X avulla. (Katso luentomonisteen luvun 7 kaava (7.3) sivulla 97).