Todennäköisyyslaskenta II, 9. harjoitus (16.–21.11.2015)

1. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$\mathbb{E}X_1 = 1, \quad \mathbb{E}X_2 = 2, \quad \operatorname{var} X_1 = 1, \quad \operatorname{var} X_2 = 3.$$

ja olkoon $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. Määritellään

$$Y = \begin{pmatrix} 2015 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X$$

Laske $\mathbb{E}X$, $\operatorname{Cov}(X)$, $\mathbb{E}Y$ sekä $\operatorname{Cov}(Y)$.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa tasajakaumaa $U(0,1)$. Toisin sanoen vektorilla (X,Y) on tasajakauma yksikköneliössä. Määritellään nyt uusi satunnaisvektori (U,V) lineaarimuunnoksilla $U = 3X + 4Y$, $V = 4X + 3Y$.

a) Kirjoita muunnos matriisikertolaskun muotoon, ts. muodosta sellainen neliömatriisi A, että $(U,V) = A(X,Y)$, missä (X,Y) ja (U,V) ymmärretään pystyvektoreiksi.

b) Tutki mihin yksikköneliön pisteet (X,Y) kuvautuvat muunnoksessa. (Vihje: kuvajoukko on eräs suunnikas, ja voit aloittaa esim. tutkimalla mihin neliön kulmat kuvautuvat) Laske muunnoksen Jacobin determinantti ja päättele siitä vektorin (U,V) tiheysfunktio.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joista kumpikin noudattaa eksponenttijakaumaa $\operatorname{Exp}(\lambda)$, jossa $\lambda > 0$ on vakio. Määritellään satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla $U = X + Y$, $V = X - Y$. (Silmäile esimerkkiä 7.6 ennen kuin lähdet laskemaan tätä laskua.)

a) Johda satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio.

b) Johda satunnaismuuttujien U ja V reunatiheysfunktiot. (U:n jakauma on tuttu luvusta 5; V:llä on ns. Laplacen jakauma).

4. Jatkoa tehtävään 2. Laske satunnaisvektorin (U,V) odotusarvo ja kovarianssimatriisi. Voit käyttää joko kovarianssin bilineaarisuutta tai kovarianssin muunnoskaavaa (7.9) Laske vielä U:n ja V:n korrelaatiokerroin.

5. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma tiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = 8xy, \quad 0 < x < y < 1 \quad \text{(ja nolla muualla).}$$

a) Laske ehdollinen tiheys $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$, kun $0 < x < 1$.

b) Laske

$$m(x) = \int_x^1 y f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y, \qquad \text{kun } 0 < x < 1.$$

(Arvo $m(x)$ on nyt ehdollisen jakauman odotusarvo eli ns. ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(Y|X = x)$.)

6. Olkoot X ja Y riippumattomia Poissonin jakaumaa noudattavia satunnaismuuttujia siten, että $\mathbb{E}X = \lambda > 0$ ja $\mathbb{E}Y = \mu > 0$. Olkoon $U = X + Y$. Johda satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma ehdolla $U = u$ (jossa $u \geq 0$ on kokonaisluku). Ehdollinen jakauma on binomijakauma, mutta mitkä ovat jakauman parametrit? (Opastus: U:n jakauman saat selville Poissonin jakauman yhteenlaskuominaisuuden avulla (ks. jakso 5.1.5). Laskeaksesi ehdollisen todennäköisyyden $\mathbb{P}(X = x \,|\, U = u)$ tarvitset todennäköisyyden $\mathbb{P}(X = x, X + Y = u)$, jonka saat laskettua suoraan tehtävänannon perusteella.