Todennäköisyyslaskenta II, 8. harjoitus (9.–13.11.2015)

1. Olkoon satunnaismuuttujilla X ja Y jatkuva yhteisjakauma yhteistiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = 2x \times \mathbf{1}\{\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \,\} = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{muutoin} \end{cases}$$

Laske seuraavat todennäköisyydet:

a) $\mathbb{P}(Y < X^2)$

b) $\mathbb{P}(Y^2 < X < Y)$

2. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma yhteistiheysfunktiolla

$$f_{X,Y}(x,y) = cxy \times \mathbf{1}\{\, 0 \le x < y \le 1 \,\}$$

a) Määrää vakio c

b) Määrää reunatiheysfunktio f_X

c) Määrää reunatiheysfunktio f_Y

3. Olkoon parilla (X, Y) tasajakauma ympyrässä, jonka keskipiste on $(\frac{1}{2}, 0)$ ja jonka halkaisija on yksi. Laske satunnaismuuttujan X reunajakauman tiheysfunktio. Mikä luvussa 5 olleista jakaumista X:llä on?

4. Jatkoa tehtävään 2. Satunnaismuuttujilla X ja Y on jatkuva yhteisjakauma tehtävän 2 yhteistiheysfunktiolla. Laske satunnaisvektorin (X, Y) odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi.

5. Tutki, ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia, kun niiden yhteistiheysfunktio on

a) $f(x, y) = 4xy$, kun $0 < x < 1$ ja $0 < y < 1$ (ja nolla muuten)

b) $f(x, y) = 8xy$, kun $0 < y < x < 1$ (ja nolla muuten)

6. Näytä että luentojen kaava (7.7)

$$\mathbb{E}(A\mathbf{Z}B + C) = A(\mathbb{E}\mathbf{Z})B + C$$

on voimassa, kun $\mathbf{Z}$ on satunnaismatriisi ja A, B ja C ovat vakiomatriiseja, joiden dimensiot ovat sellaiset, että lauseke $A\mathbf{Z}B + C$ on määritelty. Opastus: Näytä, että kaikilla indekseillä (i, j) on voimassa

$$\big(\mathbb{E}(A\mathbf{Z}B + C)\big)_{ij} = \big(A(\mathbb{E}\mathbf{Z})B + C\big)_{ij}$$

jossa alaindekseillä ij merkitään matriisiarvoisen lausekkeen kohdassa (i, j) olevaa alkiota. Tarviset siten matriisikertolaskun määritelmää, odotusarvon lineaarisuutta sekä satunnaismatriisin odotusarvon määritelmää tehtävään vastaamiseen.