Todennäköisyyslaskenta II, 7. harjoitus (2.–6.11.2015)

1. Olkoon $X > 0$ sellainen satunnaismuuttuja, että odotusarvot $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}(1/X)$ ja $\mathbb{E}\ln(X)$ ovat kaikki reaalilukuja. Mitä voit sanoa Jensenin epäyhtälön avulla

a) lukujen $1/\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}(1/X)$ suuruusjärjestyksestä, ja

b) lukujen $\ln(\mathbb{E}X)$ ja $\mathbb{E}\ln(X)$ suuruusjärjestyksestä?

c) Laske edellä kerrotut neljä suuretta (tai niiden likiarvot), kun X:llä on välin $(1, 2)$ tasajakauma, ja tarkista tällä tavalla, että sait edellä järkeiltyä suuruusjärjestyksen oikein päin.

2. Ajatellaan, että meillä on 90000 kokonaislukua, joiden keskiarvo on 5 ja neliöiden keskiarvo on 26. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka ptnf määräytyy näiden lukujen avulla seuraavasti: jos luku k esiintyy n_k kertaa, niin $\mathbb{P}(X = k) = n_k/90000$. Laske $\mathbb{E}X$ ja $\operatorname{var} X$ sekä laske Tšebyševin epäyhtälön avulla yläraja-arvio todennäköisyydelle $\mathbb{P}(X \geq 8)$. Kuinka paljon lukuja 3, 4, 5, 6 ja 7 on vähintään?

3. Olkoot $x_1, \dots, x_n$ aidosti positiivisia lukuja. Niiden aritmeettinen keskiarvo $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Tämän lisäksi tarkastelemme lukujen x_i geometrista keskiarvoa G, joka määritellään kaavalla

$$G = (x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n}.$$

Todista *Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö*

$$G \leq A$$

seuraavien ohjeiden avulla. Määritellään diskreetti satunnaismuuttuja X siten, että se saa todennäköisyydellä $1/n$ arvokseen luvun x_i (kun $i = 1, \dots, n$). Tällöin tietysti $\mathbb{E}X = A$. Tutki suureita $\mathbb{E}\ln(X)$ ja $\ln G$ ja selvitä, mitä tekemistä niillä on keskenään. Hyödynnä 1. tehtävässä todettua lukujen $\ln(\mathbb{E}X)$ ja $\mathbb{E}\ln(X)$ välistä suuruusjärjestystä.

4. Näytä luentojen lauseesta 6.4. puolet, eli että jos g on konveksi välillä I, niin

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \leq \frac{g(c) - g(b)}{c - b}$$

aina kun $a < b < c$ ovat välin I alkioita. Toimi seuraavasti: etsi sellainen $\lambda \in (0, 1)$, että $b = \lambda a + (1 - \lambda)c$. Sovella sitten konveksisuuden määritelmää kun $x = a$, $y = c$ ja kun λ on äsken saamasi λ. Järjestele termit (mahdollisesti lisäämällä ja vähentämällä termejä) kunnes saat yllä olevan epäyhtälön. Piirrä myös kuva ja selitä erotusosamäärät geometrisesti.

5. Päättele Minkowskin epäyhtälö tapauksessa $p = 3$ seuraavasti:

a) päättele että $\mathbb{E}|X + Y|^3 \leq \mathbb{E}(|X + Y|^2 \times |X|) + \mathbb{E}(|X + Y|^2 \times |Y|)$, missä $\times$ tarkoittaa kertolaskua.

b) päättele Minkowskin epäyhtälö tästä soveltamalla Hölderin epäyhtälöä oikean puolen termeihin ja lopuksi sieventämällä yhteiset tekijät samalle puolelle epäyhtälöä.

6. Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka momenttiemäfunktio on

$$M_X(t) = \frac{e^{6t} - 2e^{3t} + 1}{9t^2}, \text{ kun } t \neq 0$$

ja $M_X(0) = 1$. Merkitään $g(t) = e^{-ta}M(t)$.

1. Laske $\lim_{t\to\infty} g(t)$ kun $a > 6$, $a = 6$ ja $a < 6$.

2. Mitä pystyt Lauseen 6.9. avulla päättelemään satunnaismuuttujan häntätodennäköisyyksistä $\mathbb{P}(X \geq a)$ näistä raja-arvoista?