Todennäköisyyslaskenta II, 6. harjoitus (12.–16.10.2015)

1. Johda Geom(p)-jakauman kertymäfunktiolle yksinkertainen lauseke, jossa ei esiinny pitkää summausta. (Vihje: Geometrinen sarja.) Laske $\mathbb{P}(100 \le X \le 200)$, kun $X \sim \text{Geom}(1/100)$.

2. Olkoon $Z \sim N(0,1)$. Laske arvot $Z:n$ kuudelle ensimmäiselle momentille $\mathbb{E}Z^k$, $k = 1, 2, ..., 6$ seuraavilla kahdella tavalla.

a) Tarkastele integraalia

$$\mathbb{E}Z^k = \int_{-\infty}^{\infty} z^k f(z)dz.$$

Parittomilla k integrandi on pariton funktio, joten integraali on nolla. Parillisilla k integrandi on parillinen funktio: muuta integrointialueeksi ensin $(0, \infty)$, tee muuttujanvaihto $y = x^2/2$ sekä ilmaise lopputulos gammafunktion avulla. Käytä hyväksi jaksossa 5.2 kerrottuja gammafunktion ominaisuuksia.

b) Kehitä jakauman momenttiemäfunktio $M(t) = \exp(t^2/2)$ potessisarjaksi, ja tutki sarjan termejä.

3. Olkoon sm:lla X tasajakauma $\text{U}(-1, 1)$. Laske jakauman momenttiemäfunktio ja kehitä se potenssisarjaksi. Pääattele tuloksesta momentit $\mathbb{E}X^k$, kun $k = 2, 4, 6$. (Tarkista lopuksi, että saat samat momentit suoraan integroimalla.)

4. Kolikkoa heitetään toistuvasti, kunnes on saatu 3 kruunaa. Olkoon X saatujen klaavojen määrä.

(a) Laske $\mathbb{E}X$.

(b) Laske kahden peräkkäisen pistetodennäköisyyden suhde $w(x) = f(x+1)/f(x)$ mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa, josta binomikertoimet ja kertomat on sievennetty pois. (Muista, että esim. $(x+1)! = (x+1) \cdot x!$)

5. Laske numeeriset arvot seuraaville integraaleille:

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-2x} dx$$

ja

$$\int_0^1 x^3 (1-x)^4 dx.$$

Vihjeitä: Gammafunktio ja beetafunktio jaksosta 5.2. (Jälkimmäisen integraalin voisi laskea myös työläästi avaamalla binomin $(1-x)$ potenssin ja integroimalla näin saatua polynomia.)

6. Tikkataulun keskipiste on origossa. Tikkaa heitetään siten, että X- ja Y-koordinaattti (senttimetreinä) ovat riippumattomasti normaalijakautuneet odotusarvolla 0 ja hajonnalla 10. Mikä on suureen $Z = R^2$ jakauma, kun $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ on tikan etäisyys origosta?

Mikä on Z:n kertymäfunktio? Laske sen avulla R:n mediaani.

Vihje: Kappaleet 5.3.7 ja 5.3.4. Jos haluat voit vaihtaa mittayksikköä ja tarkastella etäisyyksiä esim. desimetreinä.