

Todennäköisyyslaskenta II, 5. harjoitus (5.–9.10.2015)

1. (Luvut $g(\mathbb{E}X)$ ja $\mathbb{E}g(X)$ ovat yleensä erisuuret.) Laske $g(\mathbb{E}X)$ ja $\mathbb{E}g(X)$, kun $g(x) = x^2$ ja

a) X noudattaa diskreettiä tasajakaumaa joukossa $\{0, 1, 2, 3\}$,

b) $X \sim U(0, 2)$.

2. Olkoot X ja Y sellaisia satunnaismuuttujia, joille

$$\mathbb{E}X = -1, \quad \mathbb{E}Y = 1, \quad \mathbb{E}X^2 = 3, \quad \mathbb{E}Y^2 = 6, \quad \mathbb{E}(XY) = 2.$$

Laske (a) $\text{var } X$, (b) $\text{var } Y$, (c) $\text{cov}(X, Y)$, (d) $\text{var}(2X - Y)$.

3. Olkoot X_1 ja X_2 riippumattomia satunnaismuuttujia, joille

$$\mathbb{E}X_1 = 1, \quad \mathbb{E}X_2 = 2, \quad \text{var } X_1 = 1, \quad \text{var } X_2 = 3.$$

Määritellään

$$Y = 2015 - 10X_1 + 4X_2, \quad Z = 4 + X_1 + 2X_2.$$

Laske $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}Z$, $\text{var}(Y)$, $\text{var}(Z)$ ja $\text{cov}(Y, Z)$.

4. Laske kolme ensimmäistä momenttia $\mathbb{E}X^k$, $k = 1, 2, 3$, kun X noudattaa Poissonin jakaumaa $\text{Poi}(\theta)$ ja $\theta > 0$. (Opastus: Jakauman momenttiemäfunktio $M(t)$ löytyy monisteen jaksosta 5.1.5. Tätä derivoimalla saat momentit laskettua).

5. Määritellään satunnaismuuttujan X *vinous* (engl. *skewness*) kaavalla

$$S(X) = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

missä $\mu_3 = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^3)$ on kolmas keskusmomentti ja σ on keskihajonta. Laske $S(X)$, kun X on jatkuva sm tiheysfunktioilla

(a) $f(x) = 2x$, kun $0 < x < 1$, ja nolla muuten.

(b) Millä arvoilla a ja b tasajakautuneella $X \sim U(a, b)$ on sama odotusarvo ja varianssi kuin a-kohdan jakaumalla? Laske sen *vinous*.

6. Johda $\mathbb{E}X^4$, kun $X = \mu + \sigma Z$ ja Z on satunnaismuuttuja, jonka neljä ensimmäistä (origo)momenttia ovat

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}Z^3 = 0, \quad \mathbb{E}Z^2 = 1, \quad \mathbb{E}Z^4 = 3.$$

(Tulet johtaneeksi kaavan normaalijakauman $N(\mu, \sigma^2)$ neljännelle momentille, koska jakaumalla $N(0, 1)$ on yllä luetellut momentit.)