Todennäköisyyslaskenta II, 4. harjoitus (28.–2.10.2015)

Nämä tehtävät perustuvat opetusmonisteen kappaleisiin 2.9 – 2.10. ja lukuun 3. sekä luvun 4 alkuun.

1. (Kvantiili-kvantiili–kuvion [*engl. q–q plot*] idea.) Olkoon satunnaismuuttujalla X sellainen jakauma, että sen kvantiilifunktio q_X saadaan sen kertymäfunktion F_X käänteisfunktiona (eli jakson 2.8 alussa mainitut oletukset ovat voimassa). Olkoon $s > 0$ ja $c \in \mathbb{R}$, ja määritellään $Y = sX + c$

a) Miten $F_Y(y)$ saadaan ilmaistua sm:n X kf:n F_X avulla?

b) Miten sm:n Y kvantiilifunktio $q_Y(u)$ saadaan ilmaistua kvantiilifunktion q_X avulla? Huomaa, että pisteet $(q_X(u), q_Y(u))$ sattuvat tietylle suoralle, kun $0 < u < 1$. Mikä on kyseisen suoran kulmakerroin ja mikä on sen ja y-akselin leikkauspiste?

2. Satunnaismuuttuja $U \sim \mathrm{Exp}(1)$ ja $V = U/(2 + U)$. Laske f_V käyttämällä muuttujanvaihtotekniikkaa. (monisteen Lause 2.12 tai muistisääntö (2.12)).

3. Noppaa heitetään kaksi kertaa. V_1 on ensimmäisen heiton silmäluku ja V_2 toisen heiton silmäluku. Määritellään satunnaismuuttujat $X = \min(V_1, V_2)$ ja $Y = \max(V_1, V_2)$. Perustele, miksi satunnaismuuttujien X ja Y yptnf on

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} 1/36, & \text{kun } 1 \le x = y \le 6, \\ 2/36, & \text{kun } 1 \le x < y \le 6, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Johda reuna-ptnf:t f_X ja f_Y yptnf:n reunasummina.

4. Jatkoa edelliseen tehtävään.

a) Ovatko edellisen tehtävän satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia?

b) Esitä tapahtuma $\{X > x\}$ muodossa $\{V_1 > v_1, V_2 > v_2\}$ keksimällä sopivat v_1 ja v_2.

c) Päättele silmälukujen V_1 ja V_2 riippumattomuuden ja kohdan *b*) avulla sm:n X kf F_X.

d) johda kohdan *c*) kertymäfunktiosta F_X vastaava reuna-ptnf f_X (toivottavasti sait saman kuin edellisessä tehtävässä)

5. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Kuten tehtävässä 3, määritellään $X = \min(V_1, V_2)$ ja $Y = \max(V_1, V_2)$. Laske $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}Y$.

6. Olkoon $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Laske odotusarvo $\mathbb{E}X^2$ laskemalla summa

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 f(x)$$

samantapaisella tekniikalla, kuin mitä käytetään luentomonisteen esimerkissä 4.3. (Opastus: käytä apuna identiteettiä $x^2 = x(x-1) + x$. Identiteetin termiä x vastaava summa $\mathbb{E}X = \sum x f(x) = np$ on jo laskettu esimerkissä 4.3. Lopputuloksen pitäisi olla $np(1-p) + n^2p^2$.)