Todennäköisyyslaskenta II, 3. harjoitus (21.–25.9.2015)

Nämä tehtävät perustuvat opetusmonisteen kappaleisiin 2.1 – 2.8. ja ensimmäinen tehtävä lukuun 1.

1. Mitkä seuraavista funktioista F_1, F_2, F_3 ja F_4 ovat kertymäfunktioita? Mitkä niistä ovat diskreetin jakauman kertymäfunktioita ja mitkä jatkuvan jakauman kertymäfunktioita? Laske diskreeteille jakaumille niiden pistetodennäköisyysfunktio ja jatkuville jakaumille niiden tiheysfunktio.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ 1/4 & \text{kun } 0 \leq x < 1/4, \\ 3/5 & \text{kun } 1/4 \leq x < 3/4, \\ 1 & \text{kun } x \geq 3/4, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x/2 & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \geq 1, \end{cases}$$

$$F_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x^2 - 3x + 4 & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \geq 1, \end{cases} \qquad F_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{kun } x < 0, \\ x^3 & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Olkoon $\alpha > 0$. Määritellään jatkuva jakauma, jonka tf on $f(x) = k \cdot h(x)$, jossa h on

$$h(x) = x^{\alpha-1}, \quad \text{kun } 0 < x < 1,$$

ja h on nolla muualla.

(a) Laske vakion k arvo, (b) johda jakauman kertymäfunktio, (c) johda jakauman kvantiilifunktio.

3. Olkoon $X > 0$ jatkuvasti jakautunut sm, jonka tf $f_X(x)$ on jatkuva ja aidosti positiivinen, kun $x > 0$ (ja $f_X(x) = 0$ muuten). Laske satunnaismuuttujien Y ja Z kertymäfunktiot, kun

$$Y = \sqrt{X}, \qquad Z = \frac{1}{X+1}.$$

Tarkista, että sekä Y:n että Z:n jakauma on jatkuva (joko sovella lausetta 2.7 tai tarkista lauseen 2.12 oletukset). Laske lopuksi Y:n ja Z:n tiheysfunktiot.

4. (Kriittisiä pisteitä kvantiilifunktion avulla.) Olkoon Y jatkuvasti jakautunut sm, jonka kvantiilifunktio q on kertymäfunktion tavanomainen käänteisfunktio. Oletetaan lisäksi, että kvantiilifunktion q arvot osataan laskea. Annettuna on luku $0 < \alpha < 1$.

a) Etsi pisteet y_1 ja y_2 siten, että $\mathbb{P}(Y < y_1) = \mathbb{P}(Y > y_2) = \frac{1}{2}\alpha$.

5. Kohdissa *a*) ja *b*) annetaan diskreettien *kokonaislukuarvoisten* satunnaismuuttujien $1 \leq X \leq 2$ ja $1 \leq Y \leq 3$ yptnf $f(x,y)$ kahdessa eri tilanteessa. Johda satunnaismuuttujien X ja Y reunajakaumat, ja tutki ovatko X ja Y riippumattomia.

a) $f(x,y) = \frac{1}{3}$, kun $1 \leq x \leq 2$ ja $1 \leq y \leq 3$ sekä $3x \leq 2y$,

b) $f(x,y) = \frac{1}{6}$, kun $1 \leq x \leq 2$ ja $1 \leq y \leq 3$.

6. Satunnaismuuttujalla $Y = 2\ln X$ on tasajakauma $U(a,b)$ (jossa $a < b$). Laske tf f_X käyttämällä muuttujanvaihtotekniikkaa (monisteen Lause 2.12 tai muistisääntö (2.12)).