Todennäköisyyslaskenta II, 2. harjoitus (14.–18.9.2015)

Nämä tehtävät perustuvat opetusmonisteen kappaleisiin 2.1 – 2.8. ja ensimmäinen tehtävä lukuun 1.

1. Urheilijalta testataan doping-aineen S käyttöä testillä, jolla on kaksi mahdollista tulosta: tulos voi olla joko *positiivinen* (jolloin testi antaa todisteita aineen S käytöstä) tai *negatiivinen*. Tällaisen testin *sensitiivisyys* on määritelmän mukaan tn saada positiivinen testitulos, kun testattava henkilö on käyttänyt ainetta S, ja sen *spesifisyys* on tn saada negatiivinen testitulos, kun testattava henkilö ei ole käyttänyt ainetta S. Aineen käytön *prevalenssi* on todennäköisyys, että populaatiosta satunnaisesti valittu urheilija on käyttänyt ainetta S.

Tarkastelemme nyt erinomaisen hyvää testiä, jonka sensitiivisyys on 99 % ja spesifisyys on 98 %. Aineen S käytön prevalenssi on $0,2$ %. Peräkylän urheilukisoissa Matti joutui dopingtestiin ja sai positiivisen testituloksen. Laske todennäköisyys, että Matti on käyttänyt ainetta S. (Selvennys: Tässä tietenkin kysytään ehdollista todennäköisyyttä. Sensitiivisyys ja spesifisyys ovat tiettyjä ehdollisia todennäköisyyksiä.)

2. Tarkastelemme kahden nopan heittoa. Olkoon X_1 ensimmäisen nopan silmäluku, ja X_2 toisen nopan silmäluku. Olkoon Y silmäluvuista suurin, ts. $Y = \max(X_1, X_2)$. Johda satunnaismuuttujan Y pistetodennäköisyysfunktio.

3. Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{kun } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Määritä vakion c arvo, ja johda kaava jakauman kertymäfunktiolle.

4. Olkoon X satunnaismuuttuja, ja määritellään satunnaismuuttuja Y siten, että $Y = e^{3X}$ (ts. $Y(\omega) = e^{3X(\omega)}$ kaikilla ω). Ilmaise Y:n kertymäfunktio X:n kertymäfunktion avulla.

5. Määritellään funktio f kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{kun } -2 < x < -1 \\ \frac{1}{10\sqrt{|x|}} & \text{kun } -1 < x < \frac{9}{4} \text{ ja } x \neq 0 \\ \frac{3}{10}\exp(-x + \frac{9}{4}) & \text{kun } x > \frac{9}{4} \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

a) Tarkista, että f on tiheysfunktio, ja hahmottele sen kuvaaja.

b) Olkoon satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f. Laske $\mathbb{P}(-\frac{3}{2} < X < 1)$.

6. Tarkista lauseen 2.7 avulla, että funktio

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < -1 \\ \frac{1}{8}(x+1)^2 & \text{kun } -1 \leq x < 0 \\ 1 - \frac{7}{8}(1-x)^2 & \text{kun } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{kun } x \geq 1 \end{cases}$$

on jatkuvan jakauman kertymäfunktio. Laske jakauman tiheysfunktio sekä piirrä tiheysfunktion kuvaaja.