Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta II
2. kurssikoe 18.12.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu ja MAOL taulukkokirjaa

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = c\,(3 + x^2 y)\,\mathbf{1}\{\,0 < x < 1,\ 0 < y < x^2\,\}$$

a) Laske vakion c arvo. (2p)
b) Laske ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(\,Y \mid X = x\,)$, kun $0 < x < 1$. (4p)

Ratkaisuehdotus: Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen kohta on kirjoitettu näkyviin.

Kohdassa a) vakion c arvo selviää yhtälöstä

$$\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

Tämä yhtälö seuraa siis siitä, että funktio $f_{X,Y}$ on yhteistiheysfunktio. Fubinin lauseen avulla voimme laskea vasemman puolen tasointegraalin

$$\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{d}y\, c\,(3 + x^2 y)$$

missä käytimme apuna sitä, että indikaattorifunktiosta tiedämme suoraan, että $0 < y < x^2$, joten on helpompi integroida ensin muuttujan y suhteen ja sitten integroida x yli välin $(0,1)$.

Nyt sisempi integraali on

$$\int_0^{x^2} c\,(3 + x^2 y)\mathrm{d}y = c\int_0^{x^2} (3 + x^2 y)\mathrm{d}y = c(F_1(x^2) - F_1(0))$$

kun F_1 on funktion $(3 + x^2 y)$ (eräs) antiderivaatta muuttujan y suhteen, eli

$$F_1(y) = \int (3 + x^2 y)\mathrm{d}y = 3y + \tfrac{1}{2}x^2 y^2 (+\text{vakio})$$

Sijoittamalla tähän $t = 0$, havaitsemme $F_1(0) = 0$ ja sijoittamalla $t = x^2$ päädymme

$$F_1(x^2) = 3x^2 + \tfrac{1}{2}x^2(x^2)^2 = 3x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 x^4 = 3x^2 + \tfrac{1}{2}x^6.$$

Siispä

$$\int_0^{x^2} c\,(3+x^2y)\mathrm{d}y = c(F_1(x^2)-F_1(0)) = c\,(3x^2+\tfrac{1}{2}x^6).$$

Olemme siten jo päätelleet, että

$$\int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} \mathrm{d}y\, c\,(3+x^2y) = c\int_0^1 (3x^2+\tfrac{1}{2}x^6)\mathrm{d}x = c\,(F_2(1)-F_2(0))$$

Vastaavasti voimme laskea antiderivaatan F_2 funktiolle $3x^2+\frac{1}{2}x^6$, mikä on

$$F_2(x) = \int^x x^3 + \frac{1}{2\times 7}x^7$$

ja siispä $F_2(0)=0$ ja $F_2(1)=1+\frac{1}{14}=\frac{15}{14}$. Kaiken kaikkiaan olemme päätelleet, että

$$1 = \int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c\,(F_2(1)-F_2(0)) = c\frac{15}{14}$$

joten kysytty vakio $c=\frac{14}{15}$.

Kohdassa *b*) kysyttiin ehdollista odotusarvoa $\mathbb{E}(\,Y \mid X=x\,)$ ehdolla satunnaismuuttujan arvo. Luentojen määritelmän mukaan tämä on

$$\mathbb{E}(\,Y \mid X=x\,) = \int y\, f_{Y|X}(y \mid x)\mathrm{d}y$$

Edelleen ehdollinen tiheysfunktio on luentojen määritelmän mukaan silloin kun $f_X(x)>0$ yhtä kuin

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}\mathbf{1}\{\,f_X(x)>0\,\}$$

joten integraalin laskemiseksi tarvitsemme satunnaismuuttujan X reunajakauman f_X. Tämä on luentojen määritelmän nojalla

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = c\,\mathbf{1}\{\,0<x<1\,\}\int_0^{x^2}(3+x^2y)\mathrm{d}y.$$

Olemme jo kohdassa *a*) laskeneet tämän määrätyn integraalin ($=F_1(x^2)$), joten havaitsemme, että

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = c\,\mathbf{1}\{\,0<x<1\,\}(3x^2+\tfrac{1}{2}x^6)$$

Voimme nyt laskea ehdollisen tiheysfunktion $f_{Y|X}$. Kun $0<x<1$, niin $f_X(x)>0$, joten

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{c(3+x^2y)}{c(3x^2+\frac{1}{2}x^6)}\mathbf{1}\{\,0<x<1, 0<y<x^2\,\} = \frac{3+x^2y}{3x^2+\frac{1}{2}x^6}\mathbf{1}\{\,0<y<x^2\,\}$$

Kun taas $x\le 0$ tai $x\ge 1$, niin $f_X(x)=0$, joten määrittelemme

$$f_{Y|X}(y \mid x) = 0$$

Toisaalta, tehtävänannossa pyydettiin käsittelemään vain tapaus $0<x<1$, joten tällä ei ole juurikaan merkitystä.

Kun $0 < x < 1$, niin tiedämme siis että

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{3 + x^2 y}{3x^2 + \frac{1}{2}x^6} \mathbf{1}\{\, 0 < y < x^2 \,\}$$

ja siten

$$\mathbb{E}(\, Y \mid X = x \,) = \int_0^{x^2} \frac{y(3 + x^2 y)}{3x^2 + \frac{1}{2}x^6} \mathrm{d}y = \frac{1}{3x^2 + \frac{1}{2}x^6} \int_0^{x^2} (3y + x^2 y^2) \mathrm{d}y = \frac{F_3(x^2) - F_3(0)}{3x^2 + \frac{1}{2}x^6},$$

kun F_3 on funktion $(3y + x^2 y^2)$ antiderivaatta muuttujan y suhteen, eli

$$F_3(y) = \frac{3}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^2 y^3$$

Tästä näemme, että $F_3(0) = 0$ ja $F_3(x^2) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^2 x^6 = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^8$.
Siispä olemme laskeneet, että kun $0 < x < 1$, niin

$$\mathbb{E}(\, Y \mid X = x \,) = \frac{F_3(x^2) - F_3(0)}{3x^2 + \frac{1}{2}x^6} = \frac{\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^8}{3x^2 + \frac{1}{2}x^6} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^6}{3 + \frac{1}{2}x^4} = \frac{9x^2 + 2x^6}{18 + 3x^4}$$

2. Olkoon X ja Y satunnaismuuttujia, joiden yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{x^2}{8y^2} \mathbf{1}\{\, 0 < x < 2,\, y > \tfrac{1}{4}x^2 \,\}$$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \frac{X}{2}, \qquad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio (4p) ja vastaa lyhyesti perustellen seuraaviin kysymyksiin (vihje: ainakin toinen vastauksista on kyllä):

a) Noudattaako (U, V) tasajakaumaa jossakin tasoalueessa?

b) Ovatko U ja V riippumattomia?

Ratkaisuehdotus: Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen (tarvittava) kohta on kirjoitettu näkyviin. Koska on täysin vaihtoehtoisia tapoja lähestyä tehtävää, niin kaikkia mahdollisuuksia ei ehdotus myöskään kata. Edelleen, suosittelen katsomaan kertaustehtävissä ollutta tehtävää, jonka ratkaisussa käytin suoraviivaisempaa muistisääntöä. Tämä suoraviivaisempi tapa on aivan riittävä.

Luentojen perusteella meillä on kaksi erityyppistä tapaa lähestyä muunnoksen yhteistiheysfunktiota: kertymäfunktiotekniikka ja diffeomorfismin käyttö. Sovellamme tässä jälkimmäistä. Diffeomorfismin käytön voi myös jakaa eksplisiittiseen ja implisiittiseen tapaan. Edellisessä kirjoitamme näkyviin muunnokset $(U, V) = g(X, Y)$ ja $h(U, V) = (X, Y)$ ja jälkimmäisessä ajattelemme, että (u, v) on tarvittaessa (x, y):n funktio ja (x, y) on tarvittaessa (u, v):n funktio. Käytämme seuraavassa eksplisiittistä tapaa, mutta implisiittinen tapa on suoraviivaisempi ja ehkä helpommin lähestyttävä.

Tehtävänannon mukaan $(U, V) = g(X, Y)$, kun g on kahden muuttujan vektoriarvoinen funktio

$$g(x, y) = g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2} \\ 1 - \frac{x^2}{4y} \end{pmatrix}$$

Näytämme aluksi, että $g\colon A \to B$ on diffeomorfismi, kun A on tehtävänannon joukko $A = \{\, 0 < x < 2,\, y > \frac{1}{4}x^2 \,\}$.

Voimme suoraan sanoa, että g_1 on jatkuvasti derivoituva koko tasossa $\mathbb{R}^2$ eli g_1 on jatkuvasti derivoituva määrittelyjoukossamme A. Vastaavasti voimme suoraan sanoa, että g_2 on jatkuvasti derivoituva, kunhan $y \neq 0$, joten g_2 ja siten myös $g = (g_1, g_2)$ on jatkuvasti derivoituva koko määrittelyjoukossamme A.

Seuraavaksi tarkastamme että $g\colon A \to B$ on bijektio. Tätä varten etsimme sen mahdollisen käänteisfunktion $h\colon B \to A$. Löydämme funktion h ratkaisemalla yhtälön

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad h\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jos yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu, niin g on bijektio $A \to g(A) = h^{-1}(A)$. Nyt

$$\begin{aligned} g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = u \\ 1 - \frac{x^2}{4y} = v \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2u \\ \frac{1}{4}x^2y^{-1} = 1 - v \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2u \\ \frac{1}{4}(2u)^2y^{-1} = 1 - v \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2u \\ yu^{-2} = \frac{1}{1-v} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2u \\ y = u^2(1 - v)^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

eli löysimme käänteisfunktion ehdokkaan

$$h\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1(u, v) \\ h_2(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ u^2(1 - v)^{-1} \end{pmatrix}$$

ja koska ratkaisu oli yksikäsitteinen on g bijektio $A \to h^{-1}(A)$. Määräämme joukon $B = h^{-1}(A)$ selvittämällä, milloin $h(u, v) \in A$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\begin{cases} 0 < 2u < 2 \\ u^2(1 - v)^{-1} > \frac{1}{4}h_1(u, v)^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < u < 1 \\ u^2(1 - v)^{-1} > u^2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < u < 1 \\ (1 - v)^{-1} > 1 \end{cases}$$

Nyt ehdosta $(1 - v)^{-1} > 1$ seuraa, että $1 - v > 0$, sillä muuten $(1 - v)^{-1} < 0$. Siispä $v < 1$. Kun $v < 1$, niin ehdosta $(1 - v)^{-1} > 1$ seuraa, että $1 - v < 1$ eli $v > 0$. Olemme siis päätelleet, että $h(u, v) \in A$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $u, v \in (0, 1)$. Siispä joukko $B = (0, 1) \times (0, 1)$ ja $g\colon A \to B$ on siis bijektio.

Koska suoraan havaitsemme, että kuvaus h_1 on jatkuvasti derivoituva koko tasossa ja h_2 on jatkuvasti derivoituva, kunhan $v \neq 1$, joten h on jatkuvasti derivoituva joukossa B. Siispä $g\colon A \to B$ on myös diffeomorfismi.

Luentojen (esimerkiksi muistisäännön) perusteella voimme nyt todeta, että

$$f_{U,V}(u, v)|\,\partial(u, v)\,| = f_{X,Y}(x, y)|\,\partial(x, y)\,|$$

eli toisin sanoen,

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)\Big|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big| = f_{X,Y}(h_1(u,v),h_2(u,v))|\,J_h(u,v)\,|$$

missä J_h on käänteisfunktion h jacobiaani, joka voidaan nyt laskea:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\partial_u h_1(u,v) & \partial_v h_1(u,v)\\ \partial_u h_2(u,v) & \partial_v h_2(u,v)\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}\partial_u(2u) & \partial_v(2u)\\ \partial_u(u^2(1-v)^{-1}) & \partial_v(u^2(1-v)^{-1})\end{pmatrix}\\ &= \det\begin{pmatrix}2 & 0\\ \partial_u(u^2(1-v)^{-1}) & u^2(1-v)^{-2}\end{pmatrix}\\ &= \frac{2u^2}{(1-v)^2} - 0\times\partial_u(u^2(1-v)^{-1})\\ &= \frac{2u^2}{(1-v)^2}\end{aligned}$$

Siispä olemme jo päätelleet, että

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(h_1(u,v),h_2(u,v))\frac{2u^2}{(1-v)^2}$$

Enää tarvitsee sijoittaa h_1 ja h_2 satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktion:

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(h_1(u,v),h_2(u,v)) &= \frac{(h_1(u,v))^2}{8(h_2(u,v))^2}\mathbf{1}\{\,h(u,v)\in A\,\}\\ &= \frac{(2u)^2}{8(u^2(1-v)^{-1})^2}\mathbf{1}\{\,(u,v)\in h^{-1}(A)\,\}\\ &= \frac{4u^2}{8(u^4(1-v)^{-2})}\mathbf{1}\{\,(u,v)\in B\,\}\\ &= \frac{(1-v)^2}{2u^2}\mathbf{1}\{\,(u,v)\in B\,\}\end{aligned}$$

joten kaiken kaikkiaan,

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{(1-v)^2}{2u^2}\mathbf{1}\{\,(u,v)\in B\,\}\frac{2u^2}{(1-v)^2} = \mathbf{1}\{\,(u,v)\in B\,\}$$

Nyt kysymyksiin *a*) ja *b*) voidaan vastata. Koska yhteistiheysfunktio $f_{U,V}$ on vakio 1 alueessa B, niin määritelmän mukaan (U,V) on tasajakautuneita joukossa $B=(0,1)\times(0,1)$. Siispä vastaus kysymykseen *a*) on kyllä.

Myös kysymyksen *b*) vastaus on kyllä. Tämän huomaa helpoiten siten, että

$$f_{U,V}(u,v) = \mathbf{1}\{\,0<u,v<1\,\} = \mathbf{1}\{\,0<u<1\,\}\mathbf{1}\{\,0<v<1\,\}$$

eli $f_{U,V}(u,v)$ voidaan esittää tulona $k_1(u)k_2(v)$, joten luentojen nojalla tiedämme, että $f_{U,V}(u,v)=f_U(u)f_V(v)$. Siispä U ja V ovat riippumattomia.

Vaikka U ja V riippuvatkin satunnaismuuttujasta X, niin tämä ei vielä tee U:sta ja V:stä riippuvia *toisistaan.*

3. Olkoon X, Y ja W satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli

$$\begin{cases} X \mid Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = W + 1, \\ Z \sim \mathrm{Bin}(3, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

a) Kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen tiheysfunktio $f_{X|Y}$ ja kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo $\mathbb{E}(X \mid Y)$. (2p)

b) Laske $\mathbb{E}X$. (2p)

c) Laske $\operatorname{var} X$. (2p)

Ratkaisuehdotus: Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen kohta on kirjoitettu näkyviin. Esimerkiksi kohdassa *a*) tehtäväannossa sanottiin, että riittää kertoa, mikä on ehdollinen odotusarvo ja ehdollinen tiheysfunktio, kun ehdollinen jakauma on annettu *suoraan*.

Kohdassa *a*) riittää lukea suoraan kysytyt tiedot. Tehtävänannon mukaan jokaisella $y \in \mathbb{R}$ on $X \mid (Y = y) \sim N(0, y^2)$, sillä tehtävänanto on sopimuksen mukaan lyhennys tästä. Jos kiinnitämme y:n ja merkitsemme $Z \sim N(0, y^2)$, niin satunnaismuuttujalla Z on siten sama jakauma kuin X:llä, ehdolla että $Y = y$.

Toisin sanoen, $f_{X|Y} = f_Z$ sekä $\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \mathbb{E}Z$. Nyt luentojen nojalla tiedämme, että normaalijakautuneen satunnaismuuttujan Z odotusarvo on 0 ja varianssi y^2 sekä tiheysfunktio

$$f_{X|Y}(x \mid y) = f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2}} e^{-\frac{1}{2}x^2 y^{-2}}$$

kaikilla y, joilla $f_Y(y) > 0$. Edelleen tiedämme, että

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \mathbb{E}Z = 0 = m(y)$$

Koska luentojen mukaan $\mathbb{E}(X \mid Y) = m(Y)$, kun $m(y) = \mathbb{E}(X \mid Y = y)$, niin olemme siis päätelleet että

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = m(Y) = 0$$

Kohdassa *b*) haluamme laskea satunnaismuuttujan X odotusarvon. Käytämme tässä apuna luentojen iteroidun odotusarvon kaavaa, jonka mukaan

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid Y)$$

Koska *a*)-kohdassa luimme mallista, että $\mathbb{E}(X \mid Y) = 0$, niin saamme sijoittamalla

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}0 = 0.$$

Kohdassa *c*) haluamme laskea satunnaismuuttujan X varianssin. Käytämme tässä apuna luentojen kaavaa varianssille, jonka mukaan se on ehdollisen varianssin odotusarvon ja ehdollisen odotusarvon varianssin summa eli

$$\operatorname{var} X = \mathbb{E} \operatorname{var}(X \mid Y) + \operatorname{var} \mathbb{E}(X \mid Y)$$

Koska a)-kohdan mukaan $\mathbb{E}(X \mid Y) = 0$, niin $\operatorname{var}\mathbb{E}(X \mid Y) = \operatorname{var} 0 = 0$. Toistamalla a)-kohdan päätelmät, voimme todeta, että $\operatorname{var}(X \mid Y = y) = \operatorname{var} Z$, kun $Z \sim N(0, y^2)$. Siispä $\operatorname{var}(X \mid Y = y) = y^2$, joten luentojen määritelmän mukaan $\operatorname{var}(X \mid Y) = Y^2$.

Olemme siten johtaneet, että

$$\operatorname{var} X = \mathbb{E}\operatorname{var}(X \mid Y) + \operatorname{var}\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}Y^2 + 0 = \mathbb{E}Y^2$$

Satunnaismuuttujan Y toisen momentin laskemiseen on monta tapaa. Voimme esimerkiksi käyttää identiteettiä

$$\mathbb{E}Y^2 = \operatorname{var} Y + (\mathbb{E}Y)^2 = \operatorname{var}(W+1) + \big(\mathbb{E}W + 1\big)^2 = \operatorname{var} W + (\mathbb{E}W + 1)^2$$

tai mallin antamaa identiteettiä

$$\mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}(W+1)^2 = \mathbb{E}W^2 + 2\mathbb{E}W + 1$$

joka johtaa samaan, sillä

$$\mathbb{E}W^2 + 2\mathbb{E}W + 1 = \operatorname{var} W + (\mathbb{E}W)^2 + 2\mathbb{E}W + 1 = \operatorname{var} W + (\mathbb{E}W + 1)^2$$

Koska $W \sim \operatorname{Bin}(3, \frac{1}{2})$, niin tiedämme luentojen perusteella, että $\mathbb{E}W = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ sekä $\operatorname{var} W = 3 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

Siispä

$$\operatorname{var} X = \mathbb{E}Y^2 = \operatorname{var} W + (\mathbb{E}W + 1)^2 = \tfrac{3}{4} + (1 + \tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{3}{4} + (\tfrac{5}{2})^2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{25}{4} = \tfrac{28}{4} = 7$$

4. Olkoon $X = (X_1, X_2)$ ja $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ riippumattomia standardinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita ja olkoon $Z = (X_1 - Y_2 + 3, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_3 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$.

   a) Määrää satunnaisvektorin Z jakauma. (4 p)

   b) Selitä miksi satunnaismuuttujat Z_1^2 ja $\exp(Z_2 - 3)$ ovat riippumattomia. (2 p)

Ratkaisuehdotus: Huomautus! Alla oleva ehdotus on hyvin seikkaperäinen kuvaus jokaisesta askeleesta. En luonnollisestikaan esitä, että tämä olisi *mallivastaus* vaan ainoastaan vastaus, jossa jokainen kohta on kirjoitettu näkyviin.

Kohdassa a) haluamme selvittää satunnaisvektorin Z jakauman. Huomaamme, että Z saadaan satunnaisvektoreista X ja Y affiinina muunnoksena, sillä

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} X_1 - Y_2 + 3 \\ 3Y_1 - X_2 \\ 2X_1 + Y_3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_2 \\ 2X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Y_2 \\ 3Y_1 \\ Y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} + b = AX + BY + b
\end{aligned}$$

kun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Koska $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin satunnaisvektori (X, Y) noudattaa luentojen mukaan myös multinormaalijakaumaa. Siispä

$$Z = AX + BY + b = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + b,$$

eli Z on affiini muunnos multinormaalista satunnaisvektorista (X, Y) eli Z noudattaa multinormaalijakaumaa. Luentojen mukaan jakauman täydelliseksi kuvaamiseksi tämän jälkee riittää siis kertoa odotusarvovektori $\mathbb{E}Z$ sekä kovarianssimatriisi $\operatorname{Cov} Z$.

Koska $\mathbb{E}X = (0, 0)$ ja $\mathbb{E}Y = (0, 0, 0)$, niin $A\mathbb{E}X + B\mathbb{E}Y = (0, 0, 0)$ joten

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(AX + BY + b) = A\mathbb{E}X + B\mathbb{E}Y + b = b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Kovarianssimatriisin $\operatorname{Cov} Z$ laskemiseen käytämme luentojen tietoa $\operatorname{Cov}(AZ) = A \operatorname{Cov} Z A^\top$ sekä sitä, että riippumattomien satunnaisvektorien summan kovarianssimatriisi on niiden kovarianssimatriisien summa. Koska $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin tiedämme, että $AX \perp\!\!\!\perp BY$. Edelleen vakiovektori $b \perp\!\!\!\perp (AX + BY)$, joten

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov} Z &= \operatorname{Cov}(AX + BY + b) = \operatorname{Cov}(AX) + \operatorname{Cov}(BY) + \operatorname{Cov}(b) \\ &= A \operatorname{Cov} X A^\top + B \operatorname{Cov} Y B^\top + (0, 0, 0) = AI_2A^\top + BI_3YB^\top = AA^\top + BB^\top \end{aligned}$$

Satunnaisvektorien X ja Y kovarianssimatriisit tiesimme tehtävänannon mukaan olevan yksikkömatriisi I_2 ja yksikkömatriisi I_3 vastaavasti. Olemme siis määränneet kovarianssimatriisin $\operatorname{Cov} Z$ lähes täysin, sillä tiedämme matriisit A ja B sekä niiden transpoosit. Siispä

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov} Z = AA^\top + BB^\top &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Olemme näin päätelleet, että Z on multinormaalijakautunut satunnaisvektori, jonka odotusarvovektori on b ja kovarianssimatriisi kuten yllä.

Kohdassa *b*) voimme nyt suoraan lukea kovarianssimatriisista, että $\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = 0$ eli satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 ovat korreloimattomia. Koska kohdan *a*) nojalla (Z_1, Z_2) on multinormaalijakautunut, niin luentojen mukaan $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$. Siispä niiden muunnokset ovat myös riippumattomia, eli erityisesti Z_1^2 ja $\exp(Z_2 - 3)$ ovat riippumattomia.

Toinen tapa päätellä tämä on suoraan huomaamalla, että $Z_1 = f_1(X_1, Y_2)$ ja $Z_2 = f_2(Y_1, X_2)$ ja päättelemällä tehtävänannon perusteella, että $(X_1, Y_2) \perp\!\!\!\perp (Y_1, X_2)$, voidaan myös päätellä että kysytyt muunnokset $Z_1^2 = f_1(X_1, Y_2)^2$ ja $\exp(Z_2 - 3) = \exp(f_2(Y_1, X_2) - 3)$ ovat riippumattomia.