Positiivisesti definiitit matriisit (sekä semidef)

Tapa 1 (ominaisarvot ja niiden merkit)

Esim $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

Ominaisarvot (karakteristisen polynomin juuret)

A:

$0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 0\cdot 0$

$\therefore \quad \lambda = 1 > 0$ tai $\lambda = 2 > 0$ $\Rightarrow$ A pos. definiitti

~~[illegible]~~
sillä $\forall$ om. arvot > 0.
ja A symmetrinen

B:

$0 = \det(B - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)(2+\lambda)$

$\therefore \quad \underset{>0}{\lambda = 1}$ tai $\lambda = -2 < 0$ $\Rightarrow$ B ei pos. definiitti eikä pos. semidefiniitti

C: $0 = \det(C - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(9-\lambda) - 9$

$= \lambda^2 - 10\lambda + \cancel{9} - \cancel{9} = \lambda(\lambda - 10)$

$\therefore \quad \lambda = 0$ tai $\lambda = 10$ $\Rightarrow$ C on pos. semidefiniitti mutta ei pos. definiitti

Esim $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 & 4 \\ & 5-\lambda & 6 & 7 \\ & & 8-\lambda & 9 \\ & & & 10-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 & 7 \\ 0 & 8-\lambda & 9 \\ 0 & 0 & 10-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\cdot(5-\lambda)\cdot \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & 9 \\ 0 & 10-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)\cdot(8-\lambda)\cdot(10-\lambda)$$

$\therefore$ λ ominaisarvo $\Leftrightarrow$ $\lambda = 1, 5, 8$ tai 10

Ominaisvektorit ovat (normeerat) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$
$$v^T A v = v^T A \left(v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= v^T \left(v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 8 v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 v_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= v_1^2 + 5 v_2^2 + 8 v_3^2 + 10 v_4^2 > 0 \quad \text{kun } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \neq 0.$$

HUOMAUTUS

A ei ole symmetrinen, joten luentojen arvot eivät riitä.

Yleensä (lue: lähes aina) pos. (semi)definiittisyyden määritelmän osana oletetaan symmetrisyys.

Ja käytännössä me oletamme myös.

Eli: jatkossa aina definiittisyyttä tarkastellaan vain symmetrisille matriiseille.

SEKÄ Lähes aina kun joku puhuu pos. (semi)definiittisyydestä on symmetrisyys oletettu.

Esim

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

Karakteristinen polynomi

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & 6-\lambda & 5 \\ 4 & 5 & 17-\lambda \end{pmatrix}$$

$$- \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6-\lambda & 5 \\ 3 & 5 & 17-\lambda \end{pmatrix} + \dots$$

Jos ensin polynomi saataisiin määrättyä, tulisi sitten laskea 4:n asteen polynomin juuret... ← Tämähän on ihan hirveä esimerkki :) [Tarkoituksella]

Positiivisesti definiitit, symmetriset matriisit

Tapa 2 (Sylvesterin kriteerio)

Symm. reaalinen neliömatriisi $A = A^T$ on pos. definiitti jos ja vain jos sen kaikkien pääminoritten, joiden ~~[illegible]~~ jotka $(k \times k)$-yläkulmien determinantit ovat positiivisia.

Esim $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

1×1 -yläkulman pääminorit

$A_1 = (1)$ $B_1 = (1)$, $C_1 = (1)$

Näiden determinantit $= 1 > 0$.

2×2 -yläkulman pääminorit

$A_2 = A$ $B_2 = B$ $C_2 = C$

$\det A_2 = \det\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} = 2 > 0$

$\det B_2 = \det\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix} = -2 < 0$

$\det C_2 = \det\begin{pmatrix}1&3\\3&9\end{pmatrix} = 9-9=0$

Sylvesterin kriteeri $\Rightarrow$ A on pos. definiitti

B ei ole pos. def.

C ei ole pos. def.

HUOMAUTUS

Tämä ei vielä kerro, onko B tai C pos. semidefiniittejä.

Esim

$$A = \begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&4\\2&2&6&5\\3&4&5&17\end{pmatrix}$$

. A on symmetrinen

$A_1 = (1)$ $\quad A_4 = A$

$A_2 = \begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$

$A_3 = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&2&6\end{pmatrix}$

$\det A_1 = 1 > 0$

$\det A_2 = \det\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} = 2-1 = 1 > 0$

$$\det A_3 = \det\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&2&6\end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix}2&2\\2&6\end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\2&6\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}1&2\\2&2\end{pmatrix}$$

$$= (12-4) - (6-4) + 2\cdot(2-4)$$

$$= 8 - 2 + (-4) = 2 > 0$$

$$\det A_4 = \det\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&4\\2&2&6&5\\3&4&5&17\end{pmatrix} = \underset{\uparrow}{\cdots} = 13 > 0$$

aika työläs laskea käsin
joten tietokone/laskin avuksi

$\therefore$ A on pos. definiitti

Mutta 2×2 ja 3×3 matriisit menevät käsin mukavasti