Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 8 (26. ja 28. 1. 2016)

Tehtävät 1–3 liittyvät su-estimaattorien asymptoottiseen normaalisuuteen, jota käsitellään monisteen jaksossa 3.6. Palauta myös mieleen todennäköisyyslaskennasta keskeinen raja-arvolause.

1. (Vrt. monisteen teht. 3.13.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$. Mitä normaalijakaumaa su-estimaattori $\hat{\mu} = \overline{Y}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri? Mihin $\sqrt{n}(\hat{\mu} - \mu)$ toisin sanoen suppenee jakaumaltaan (eli heikon suppenemisen mielessä)?

Ratkaise tämä tehtävä kahdella tavalla: yhtäältä suoraan keskeisen raja-arvolauseen avulla ja toisaalta monisteen kohdan 3.6.5 avulla.

2. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on $f(y; \theta) = \theta y^{\theta - 1}$, kun $0 \le y \le 1$ (ja $= 0$ muulloin).

a) Etsi parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}$.

b) Mitä normaalijakaumaa $\hat{\theta}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?

3. (Monisteen teht. 3.15.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$. Parametrin (μ, σ^2) su-estimaattori $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ on laskettu monisteen kohdassa 2.2.6.

a) Palauta todennäköisyyslaskennasta mieleen, mikä on satunnaismuuttujaparin $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ tarkka yhteisjakauma (reunajakaumat ja komponenttien välinen riippuvuus/riippumattomuus).

b) Mitkä ovat sen kaksiulotteisen normaalijakauman parametrit (odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi), jota $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?

[*Apuja.* Syksyn 2015 Todennäköisyyslaskenta II, luentokalvojen kohta 10.9. Tarkasteltavan mallin informaatiomatriisi on laskettu aikaisemmin luennoilla ja monisteen luvussa 2.]

Tehtävä 4 liittyy tyhjentävyyden käsitteeseen. Opiskele sitä varten ainakin alustavasti monisteen lukua 4.

4. (Monisteen teht. 4.1.) Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \perp\!\!\!\perp$. Osoita faktorointikriteerin avulla, että otoskeskiarvo $\overline{Y}$ tai yhtä hyvin summa $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ on parametrin λ tyhjentävä tunnusluku.