Tilastollinen päättely II, syksy 2015 – kevät 2016
Harjoitus 7 (19. ja 21. 1. 2016)

1. Perustehtävä tarkentuvuudesta (monisteen jakso 3.5). Jatkoa harjoituksen 5 tehtävään 2 ja harjoituksen 6 tehtävään 3. Perustele, että estimaattorit $\hat{\beta}$ ja T ovat tarkentuvia, jos $x_i \geq c$ kaikilla i ja $c > 0$ on vakio.

Tehtävät 2–4 ovat "täydentävää ainesta" ja liittyvät ns. eksponenttiperheen jakaumiin. Näillä jakaumilla on monia todennäköisyyslaskennan ja tilastollisen päättelyn kannalta miellyttäviä ominaisuuksia, joihin on viitattu esim. monisteen kohdissa 2.5.2 ja 4.2.5.

2. (Monisteen tehtävä 2.20.) Parametrilla $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ indeksoitu jakaumaperhe on d-ulotteinen *eksponenttiperhe*, jos sen yptf/ytf voidaan kirjoittaa muotoon

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y};\theta) = c(\theta)h(\mathbf{y})\exp\left\{\sum_{j=1}^{d}\phi_j(\theta)t_j(\mathbf{y})\right\},$$

jossa $c(\theta)$ sekä $\phi_j(\theta)$:t ovat reaaliarvoisia ja riippuvat vain parametrista θ ja vastaavasti $h(\mathbf{y})$ sekä $t_j(\mathbf{y})$:t ovat reaaliarvoisia vain aineistosta $\mathbf{y}$ riippuvia tunnuslukuja. Vektoria $\phi = \big(\phi_1(\theta), \ldots, \phi_d(\theta)\big)$ kutsutaan perheen *luonnolliseksi parametriksi*.

a) Osoita, että mallia $K \sim \mathrm{Bin}(n, \theta)$ vastaava jakaumaperhe $f_K(k;\theta)$ (ks. monisteen esim. 2.1.5) on yksiulotteinen eksponenttiperhe, luonnollisena parametrina θ:n logit-muunnos $\log\{\theta/(1-\theta)\}$.

b) Osoita, että mallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\mu, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp$ vastaava jakaumaperhe $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y};\mu,\sigma^2)$ (ks. esim. monisteen kohta 1.2.3) on kaksiulotteinen eksponenttiperhe, luonnollisena parametrina $(\mu/\sigma^2, 1/\sigma^2)$. [*Ehdotus.* Aloita kirjoittamalla $(y_i - \mu)^2 = y_i^2 - 2\mu y_i + \mu^2$.]

3. Jatkoa edelliseen tehtävään. Perustele, että eksponenttiperheen määritelmässä vakio $c(\theta)$ riippuu θ:sta vain ϕ:n kautta. Siten perhe voidaan aina uudelleenparametroida luonnollisen parametrinsa avulla. [*Muista.* Funktiot $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y};\theta)$ ovat yhteispistetodennäköisyysfunktiota tai -tiheysfunktioita!]

4. Perustele, että jakaumaperhe $\mathrm{Tas}(0, \theta)$, $\theta > 0$, ei ole (yksiulotteinen) eksponenttiperhe.

Huom. Luennot ja harjoitukset jatkuvat joululoman jälkeen tiistaina 19. 1. 2016.