Matematiikan kirjoittamisesta

Erik Elfving

12.10.2015

1. Peruskysymykset
2. Ohjeita kirjoittamiseen
3. Pari esimerkkiä
4. Kirjallisuusviitteistä

Peruskysymykset: ”Kenelle kirjoitetaan?” ”Mitä lukija tietää entuudestaan?”

Peruskysymykset: ”Kenelle kirjoitetaan?” ”Mitä lukija tietää entuudestaan?”

- Tieteelliset julkaisut

Peruskysymykset: ”Kenelle kirjoitetaan?” ”Mitä lukija tietää entuudestaan?”

- Tieteelliset julkaisut
- Kirjat (oppikirjat, muut kirjat)

Peruskysymykset: ”Kenelle kirjoitetaan?” ”Mitä lukija tietää entuudestaan?”

- Tieteelliset julkaisut
- Kirjat (oppikirjat, muut kirjat)
- Luentomuistiinpanot

Peruskysymykset: ”Kenelle kirjoitetaan?” ”Mitä lukija tietää entuudestaan?”

- Tieteelliset julkaisut
- Kirjat (oppikirjat, muut kirjat)
- Luentomuistiinpanot
- Luennolla (esim. taululla) esitettävä teksti

Peruskysymykset: ”Kenelle kirjoitetaan?” ”Mitä lukija tietää entuudestaan?”

- Tieteelliset julkaisut
- Kirjat (oppikirjat, muut kirjat)
- Luentomuistiinpanot
- Luennolla (esim. taululla) esitettävä teksti
- Opinnäytetyöt, esim. Kandidaatintutkielma

Kirjoita kunnollisia suomen kielen lauseita.

Kirjoita kunnollisia suomen kielen lauseita.

Esim. "Ol. G ryhmä"

Kirjoita kunnollisia suomen kielen lauseita.

Esim. ”Ol. G ryhmä”
Parempi: ”Oletetaan, että G on ryhmä.”

Kirjoita kunnollisia suomen kielen lauseita.

Esim. ”Ol. G ryhmä”
Parempi: ”Oletetaan, että G on ryhmä.”

Tai: ”Jos $x > 0$ $2x > 0$.”

Kirjoita kunnollisia suomen kielen lauseita.

Esim. ”Ol. G ryhmä”
Parempi: ”Oletetaan, että G on ryhmä.”

Tai: ”Jos $x > 0$ $2x > 0$.”
Parempi: ”Jos $x > 0$, niin $2x > 0$.”

Varmista, että kirjoittamasi teksti sanoo täsmällisesti sen, mitä tarkoitat. Varmista, että lauseet eivät ole monitulkintaisia.

Esimerkki 1: Jaollisuuden määritelmä.

"Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Sanomme, että luku a on jaollinen luvulla b, jos $a = b \cdot c$."

Varmista, että kirjoittamasi teksti sanoo täsmällisesti sen, mitä tarkoitat. Varmista, että lauseet eivät ole monitulkintaisia.

Esimerkki 1: Jaollisuuden määritelmä.

"Olkoot $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Sanomme, että luku a on jaollinen luvulla b, jos $a = b \cdot c$."

Parempi: "Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Sanomme, että luku a on jaollinen luvulla b, jos on olemassa kokonaisluku c, jolle pätee $a = b \cdot c$."

Varmista, että kirjoittamasi teksti sanoo täsmällisesti sen, mitä tarkoitat. Varmista, että lauseet eivät ole monitulkintaisia.

Esimerkki 2: tyyppiä ”A ja B tai C” olevat lauseet.

Tarkoittaako tämä ”(A ja B) tai C” vai ”A ja (B tai C)”.

Varmista, että kirjoittamasi teksti sanoo täsmällisesti sen, mitä tarkoitat. Varmista, että lauseet eivät ole monitulkintaisia.

Esimerkki 3: "Jos $a > 0, \; b > 0, \; a + b > 0$"

Tarkoittaako tämä "Jos $a > 0$ ja $b > 0$, niin $a + b > 0$", vai ehkä "Jos $a > 0$, niin $b > 0$, ja siis $a + b > 0$"?

Varmista, että kirjoittamasi teksti sanoo täsmällisesti sen, mitä tarkoitat. Varmista, että lauseet eivät ole monitulkintaisia.

Esimerkki 3: ”Jos $a > 0,\ b > 0,\ a + b > 0$”

Tarkoittaako tämä ”Jos $a > 0$ ja $b > 0$, niin $a + b > 0$”, vai ehkä ”Jos $a > 0$, niin $b > 0$, ja siis $a + b > 0$”?

Esimerkki 4: kaikilla x / jollakin x.

Käytetäänkö sanoja vai symboleja?

Esim.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Käytetäänkö sanoja vai symboleja?
Esim.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Luennolla usein käytetyt "$\Rightarrow$" ja "$\Leftrightarrow$" sekä kvanttorit korvataan tekstissä mieluummin sanoilla, esim.

"$x > 0 \Rightarrow 2x > 0$"

Käytetäänkö sanoja vai symboleja?
Esim.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Luennolla usein käytetyt "$\Rightarrow$" ja "$\Leftrightarrow$" sekä kvanttorit korvataan tekstissä mieluummin sanoilla, esim.

"$x > 0 \Rightarrow 2x > 0$"
Parempi: "Jos $x > 0$, niin $2x > 0$."

Käytetäänkö sanoja vai symboleja?
Esim.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Luennolla usein käytetyt "$\Rightarrow$" ja "$\Leftrightarrow$" sekä kvanttorit korvataan tekstissä mieluummin sanoilla, esim.

"$x > 0 \Rightarrow 2x > 0$"
Parempi: "Jos $x > 0$, niin $2x > 0$."

"$x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$"

Käytetäänkö sanoja vai symboleja?
Esim.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Luennolla usein käytetyt "$\Rightarrow$" ja "$\Leftrightarrow$" sekä kvanttorit korvataan tekstissä mieluummin sanoilla, esim.

"$x > 0 \Rightarrow 2x > 0$"
Parempi: "Jos $x > 0$, niin $2x > 0$."

"$x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$"
Parempi: "Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $x^2 \geq 0$."

Käytetäänkö sanoja vai symboleja?
Esim.

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Luennolla usein käytetyt "$\Rightarrow$" ja "$\Leftrightarrow$" sekä kvanttorit korvataan tekstissä mieluummin sanoilla, esim.

"$x > 0 \Rightarrow 2x > 0$"
Parempi: "Jos $x > 0$, niin $2x > 0$."

"$x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$"
Parempi: "Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $x^2 \geq 0$."

Jos kirjoitelma on esim. logiikan alalta, ja on nimenomaan tarkoitus käyttää e.m. symboleja, niin siinä tapauksessa niitä tietysti käytetään.

Vakiintuneita merkintätapoja ei yleensä kannata muuttaa, eli ei esimerkiksi:

Vakiintuneita merkintätapoja ei yleensä kannata muuttaa, eli ei esimerkiksi:

- ”Merkitään ympyrän piirin ja halkaisijan suhdetta symbolilla α.”

Vakiintuneita merkintätapoja ei yleensä kannata muuttaa, eli ei esimerkiksi:

- ”Merkitään ympyrän piirin ja halkaisijan suhdetta symbolilla α.”
- ”Tarkastellaan reaalilukujonoa (n_x), missä $x = 1, 2, ...$”

Vakiintuneita merkintätapoja ei yleensä kannata muuttaa, eli ei esimerkiksi:

- "Merkitään ympyrän piirin ja halkaisijan suhdetta symbolilla α."
- "Tarkastellaan reaalilukujonoa (n_x), missä $x = 1, 2, \ldots$"
- "Olkoon H ryhmä ja G H:n aliryhmä."

Määrittele täsmällisesti käyttämäsi symbolit.

Määrittele täsmällisesti käyttämäsi symbolit.

Esim. funktiot: lähtöjoukko, maalijoukko, funktion lauseke tms.
"Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = x^2$."

Määrittele täsmällisesti käyttämäsi symbolit.

Esim. funktiot: lähtöjoukko, maalijoukko, funktion lauseke tms.
"Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = x^2$."

Huomaa sanojen "lauseke", "kaava", "yhtälö" ja "funktio" käyttö.
Esim. "Diskriminantin kaava on: $D = b^2 - 4ac$."

Määrittele täsmällisesti käyttämäsi symbolit.

Esim. funktiot: lähtöjoukko, maalijoukko, funktion lauseke tms.
"Määritellään funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kaavalla $f(x) = x^2$."

Huomaa sanojen "lauseke", "kaava", "yhtälö" ja "funktio" käyttö.
Esim. "Diskriminantin kaava on: $D = b^2 - 4ac$."
Funktio f, funktion arvo $f(x)$.
Siis ei "Tarkastellaan funktiota $f(x)$ ..."

Älä aloita virkettä matemaattisella symbolilla.
Vältä sijapäätteitä matemaattisissa symboleissa.

Älä aloita virkettä matemaattisella symbolilla.
Vältä sijapäätteitä matemaattisissa symboleissa.

Esim. "$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$:n laskemiseksi tehdään sijoitus ..."

Älä aloita virkettä matemaattisella symbolilla.
Vältä sijapäätteitä matemaattisissa symboleissa.

Esim. "$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$:n laskemiseksi tehdään sijoitus ..."
Parempi: "Integraalin

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

laskemiseksi tehdään sijoitus ..."

Älä aloita virkettä matemaattisella symbolilla.
Vältä sijapäätteitä matemaattisissa symboleissa.

Esim. "$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$:n laskemiseksi tehdään sijoitus ..."
Parempi: "Integraalin

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

laskemiseksi tehdään sijoitus ..."

Esim. "$f|A_n$:lla on ominaisuus ..."

Älä aloita virkettä matemaattisella symbolilla.
Vältä sijapäätteitä matemaattisissa symboleissa.

Esim. "$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$:n laskemiseksi tehdään sijoitus ..."
Parempi: "Integraalin

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

laskemiseksi tehdään sijoitus ..."

Esim. "$f|A_n$:lla on ominaisuus ..."
Parempi: "Rajoittumafunktiolla $f|A_n$ on ominaisuus ..."

Selitä tarpeeksi yksityiskohtaisesti, mitä olet tekemässä, varsinkin pitkissä kokonaisuuksissa.

Selitä tarpeeksi yksityiskohtaisesti, mitä olet tekemässä, varsinkin pitkissä kokonaisuuksissa.

Esimerkiksi pitkän todistuksen keskellä:
"Osoitamme seuraavaksi, että joukko X on äärellinen.
...
...
Olemme nyt osoittaneet, että joukko X on äärellinen."

Oikolue tekstisi!

Kirjallisuutta

Houston, K.: How to Write Mathematics, University of Leeds, 2009. https://www1.maths.leeds.ac.uk/~khouston/pdf/htwm.pdf

Knuth, D. E., Larrabee, T., Roberts, P. M.: Mathematical Writing. http://jmlr.csail.mit.edu/reviewing-papers/knuth_mathematical_writing.pdf

Steenrod, N. E., Halmos, P. R., Schiffer, M. M., Dieudonné, J. A.: How to Write Mathematics, American Mathematical Society, 1981.

Väite. Ylläolevassa kolmiossa pätee kosinilause:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Todistus. Kolmiosta ΔCBL nähdään Pythagoraan lauseen avulla, että $a^2 = (c+x)^2 + h^2$ eli

$$a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2. \tag{1}$$

Vastaavasti tutkimalla kolmiota ΔCLA saadaan, että

$$b^2 = h^2 + x^2.$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (1) saadaan yhtälö

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx. \tag{2}$$

Käyttämällä kosinin määritelmää kolmiossa ΔCLA saadaan

$$\frac{x}{b} = \cos(180^\circ - \theta),$$

eli

$$x = b\cos(180^\circ - \theta) = -b\cos\theta.$$

Jälkimmäisessä välivaiheessa käytettiin kosinin tunnettua ominaisuutta $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$. Lopuksi sijoittamalla $x = -b\cos\theta$ yhtälöön (2) saadaan kosinilause

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta.$$

Osoitetaan, että $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku.

Todistus. Tehdään antiteesi: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ joillakin kokonaisluvuilla m, n. Koska lukujen m ja n mahdolliset yhteiset tekijät voidaan supistaa, voidaan olettaa, että $\mathrm{syt}(m, n) = 1$.
Toiseenkorottamalla saadaan, että $\frac{m^2}{n^2} = 2$ eli $m^2 = 2n^2$. Siis m^2 on parillinen luku. Koska parittoman luvun neliö on aina pariton, on m välttämättä parillinen luku. Tästä seuraa, että m^2 on jaollinen luvulla 4, joten n^2 on jaollinen luvulla 2. Kuten edellä, tästä seuraa, että myös n on parillinen. Siis sekä m että n ovat parillisia, mikä on ristiriidassa sen kanssa, että $\mathrm{syt}(m, n) = 1$.
Antiteesi johti ristiriitaan, joten alkuperäinen väite on nyt todistettu.